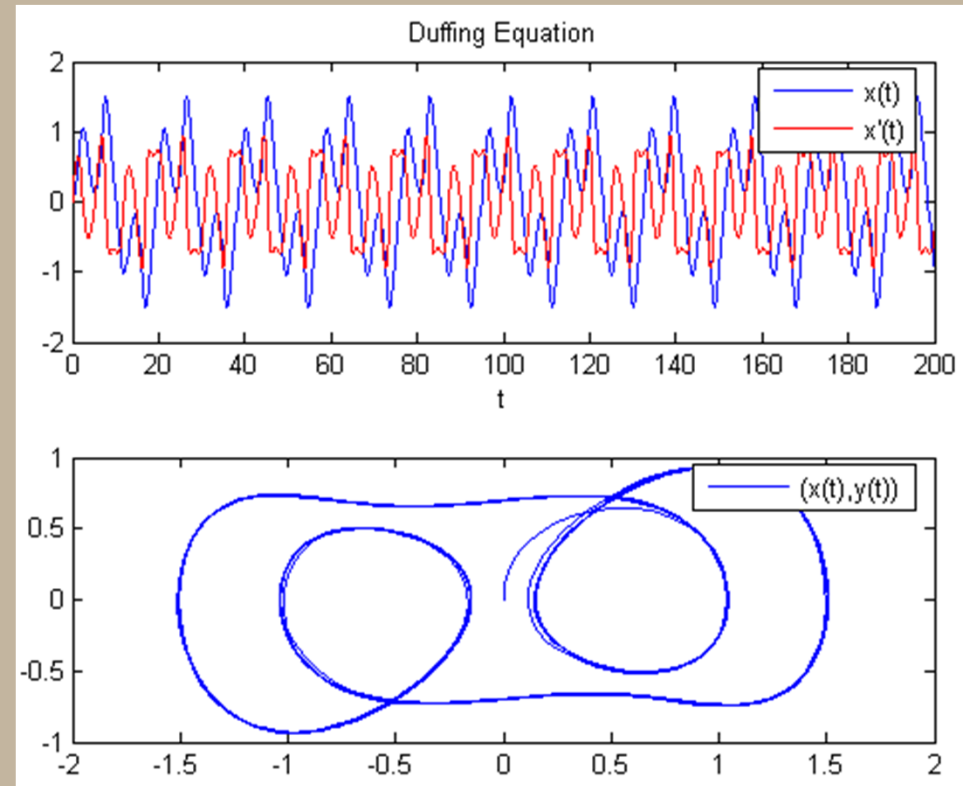


Métodos Numéricos para EDO

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

No – Lineales

Gonzalo Hernández



Métodos Numéricos para EDO:

- 1) Motivación
- 2) Definiciones: EDO Lineal y Problema de Cauchy
- 3) Resultados Teóricos para Problema de Cauchy
- 4) Método de la Serie de Taylor
- 5) Método de Euler para Problema de Cauchy
- 6) Métodos de Runge-Kutta para Problema de Cauchy:
- 7) Ejemplo Métodos Euler y Runge-Kutta Orden 4
- 8) Métodos Multi-pasos Explícitos
- 9) Sistemas de EDO y EDO de Orden Superior

Métodos Numéricos para EDO: Motivación

- Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:
La población $p(t)$ de EEUU en el siglo 20 crece aproximadamente según la edo no lineal logística:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p(t) - \beta p^2(t)$$

Donde: $\alpha=0.02$ y $\beta=0.00004$. Desde 1900 se han medido los datos de la tabla en la próxima transparencia.

- Se puede afirmar que el modelo es adecuado ?
- Cuál es error entre 1900 y 1980 ?

Métodos Numéricos para EDO: Motivación

■ Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:

Año	Tiempo t_k	$p(t)$ real [millones de personas]	Año	Tiempo t_k	$p(t)$ real [millones de personas]
1890	-10.0	62.9798	1900	0.0	76.2122
1880	-20.0	50.1892	1910	10.0	92.2285
1870	-30.0	38.5584	1920	20.0	106.0215
1860	-40.0	31.4433	1930	30.0	123.2026
1850	-50.0	23.1919	1940	40.0	132.1646
1840	-60.0	17.0634	1950	50.0	151.3258
1830	-70.0	12.8607	1960	60.0	179.3232
1820	-80.0	9.6384	1970	70.0	203.3020
1810	-90.0	7.2399	1980	80.0	226.5422
1800	-100.0	5.3085	1990	90.0	248.7099
			2000	100.0	281.4219

Métodos Numéricos para EDO: Motivación

■ Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:

Año	Tiempo t_k	$p(t)$ real
1900	0.0	76.1
1910	10.0	92.4
1920	20.0	106.5
1930	30.0	123.1
1940	40.0	132.6
1950	50.0	152.3
1960	60.0	180.7
1970	70.0	204.9
1980	80.0	226.5

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p(t) - \beta p^2(t)$$

$$p(t) = \frac{500}{\left(1 + \frac{4239}{761} e^{-\frac{1}{50}t}\right)} \quad \begin{array}{l} \text{solución} \\ \text{exacta} \end{array}$$

$$p_{k+1} = p_k + h(\alpha p_k - \beta p_k^2)$$

$$p_k = p(t = t_k) \quad \forall k = 0, \dots, 8 = n$$

$$h = \frac{(T - t_0)}{n} = \frac{(1980 - 1900)}{8} = 10$$

$$t_k = hk = 10k \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

Métodos Numéricos para EDO: Motivación

■ Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:

Año	Tiempo t_k	$p(t)$ real	$p(t)$ Edo	$p(t)$ Euler	Error1	Error2
1900	0.0	76.1	76.1	76.1	0.0	0.0
1910	10.0	92.4	89.9	89.0	2.5	0.9
1920	20.0	106.5	105.6	107.5	0.9	-1.9
1930	30.0	123.1	123.2	123.3	-0.1	-0.1
1940	40.0	132.6	142.7	141.7	-10.1	1.6
1950	50.0	152.3	164.0	152.1	-11.7	11.9
1960	60.0	180.7	186.7	173.5	-6.0	13.2
1970	70.0	204.9	210.6	203.8	-5.7	6.8
1980	80.0	226.5	235.3	229.1	-8.8	6.2
1990	90.0	248.7	260.3	253.9	-11.6	6.4
2000	100.0	281.4	285.1	278.9	-3.7	6.2

Métodos Numéricos para EDO: Definiciones

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Lineales $\Rightarrow$ Integrables

Según Orden

Coeficientes Constantes o Variables

Homogéneas o No

EDO

Encontrar $y = f(x)$ tal que:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y^{(1)}(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

No-Lineales

Tratamiento Analítico Caso a Caso
Solución Vía Método Numérico

Métodos Numéricos para EDO: Definiciones

- Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en ambas variables
- Dado un punto inicial $y_0 \in \mathbb{R}$:
- El problema de Cauchy consiste en encontrar una función $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$y(t = t_0) = y_0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$$

$$t \in [t_0, T]$$

Problema No-Lineal
de Primer Orden
No Homogéneo

Métodos Numéricos para EDO:

Resultados Teóricos para Problema de Cauchy

- Se dice que una función $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface una condición de Lipschitz en la variable y si existe L (constante de Lipschitz) con la propiedad:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in R$$

- Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto convexo. Si existe una constante L que verifica: $\left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| \leq L \quad \forall (t, y) \in R$

entonces f satisface la condición de Lipschitz en R

Métodos Numéricos para EDO:

Resultados Teóricos para Problema de Cauchy

- Teo: Sean $R = \{(t, y) / t_0 \leq t \leq T, -\infty < y < \infty\}$ y una función $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$. Si f satisface una condición de Lipschitz en la variable y entonces el problema de valor inicial:

$$y(t = t_0) = y_0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [t_0, T]$$

tiene solución única

- Veamos algunos ejemplos.

Métodos Numéricos para EDO:

Método de la Serie de Taylor para el Problema de Cauchy

- La solución del Problema de Cauchy se desarrolla en Serie de Taylor. Las derivadas se obtienen de la edo:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad , \quad y(t = t_0) = y_0 \quad , \quad \forall t \in [t_0, T]$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1}$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y'_0 = f(t_0, y_0)$$

$$y''(t_0) = y''_0 = \frac{df(t_0, y_0, y'_0)}{dt} \dots$$

Métodos Numéricos para EDO:

Método de Euler para Problema de Cauchy

- Se determinan n valores y_k de la función $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en puntos t_k equi-espaciados en $[t_0, T]$:

$$h = \frac{(T - t_0)}{n}$$

$$t_k = t_0 + kh \quad \forall k = 0, \dots, n$$

$$y_0 = y(t = t_0)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

$$\text{Error : } \varepsilon_k \approx \frac{h^2}{2} y^{(2)}(\xi_k) \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

Métodos Numéricos para EDO:

Método de Runge-Kutta Orden 2 para Problema Cauchy

- Mejoramos el método de Euler de la siguiente forma:

$$q^1_k = hf(t_k, y_k)$$

$$q^2_k = hf(t_k + \alpha h, y_k + \beta hf(t_k, y_k))$$

$$y_{k+1} = y_k + \mu_1 q^1_k + \mu_2 q^2_k$$

- Para calcular los coeficientes α , β , μ_1 , μ_2 aplicamos:

El desarrollo de Taylor -> ①

La fórmula de Runge – Kutta -> ②

Métodos Numéricos para EDO:

Método de Runge-Kutta Orden 2 para Problema Cauchy

- Por desarrollo de Taylor:

$$y_{k+1} = y(t_k + h) \approx y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(t_k)$$

$$= y(t_k) + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} f'(t_k, y_k)$$

$$f'(t_k, y_k) = \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} y'(t_k)$$

$$= \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} f(t_k, y_k)$$

$$\textcircled{1} y_{k+1} \approx y(t_k) + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \frac{h^2}{2} f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y}$$

Métodos Numéricos para EDO:

Método de Runge-Kutta Orden 2 para Problema Cauchy

- Por fórmula de Runge – Kutta:

$$y_{k+1} = y_k + \mu_1 h f(t_k, y_k) + \mu_2 h f(t_k + \alpha h, y_k + \beta h f(t_k, y_k))$$

$$f(t_k + \alpha h, y_k + \beta h f(t_k, y_k)) \approx f(t_k, y_k) + \alpha h \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \beta h f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y}$$

$$y_{k+1} = y(t_k) + \mu_1 h f(t_k, y_k) + \mu_2 h \left[f(t_k, y_k) + \alpha h \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \beta h f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} \right]$$

$$y_{k+1} = y(t_k) + (\mu_1 + \mu_2) h f(t_k, y_k) + \mu_2 \alpha h^2 \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \mu_2 \beta h^2 f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \Rightarrow \mu_1 + \mu_2 = 1 \quad \mu_2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \mu_2 \beta = \frac{1}{2}$$

Métodos Numéricos para EDO:

Método de Runge-Kutta Orden 2 para Problema Cauchy

- Método de Runge – Kutta de Orden 2:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad , \quad y(t = t_0) = y_0 \quad , \quad \forall t \in [t_0, T]$$

RK
Orden 2

$$y_0 \in \mathbb{R} \text{ dado}$$

$$q_k^1 = hf(t_k, y_k)$$

$$q_k^2 = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2}\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k^2$$

$$\text{Error : } \varepsilon_k \approx O(h^3)$$

Métodos Numéricos para EDO:

Método de Runge-Kutta Orden 2 para Problema Cauchy

■ Ejemplo método de Runge – Kutta de Orden 2:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, y(1)=1$$

$$y(t) = \frac{1}{1 + \ln(t)}$$

$$f(t, y) = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, y_0=1$$

$$y_k = y(t = t_k) \quad k = 0, \dots, 4 = n$$

$$h = \frac{(T-t_0)}{n} = \frac{(2-1)}{4} = 0.25$$

$$t_k = hk = 0.25k \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

$$q^1_k = hf(t_k, y_k), q^2_k = hf\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}q^1_k\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + q^2_k \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

t	$y(t)$	k	q^1	q^2	y_k	E_{abs}	E_{rel}
1	1	0	0	0.0247	1	0	0
1.25	1.0219	1	0.03695	0.04578	1.0247	0.0028	0.0027
1.5	1.0672	2	0.05108	0.05488	1.0705	0.0033	0.0031
1.75	1.1221	3	0.05738	0.05918	1.1254	0.0033	0.0029
2	1.1812	4			1.1846	0.0034	0.0030

Métodos Numéricos para EDO:

M. Runge-Kutta Orden 2 aplicado al modelo logístico:

$$p' = \alpha p(t) - \beta p^2(t)$$

$$f(t, p) = \alpha p - \beta p^2$$

$$\alpha = 0.02, \beta = 0.00004$$

$$p(t_0) = p_0 = 76.1$$

$$p_k = p(t = t_k) \quad k = 0, \dots, 8 = n$$

$$h = \frac{(T - t_0)}{n} = \frac{(1980 - 1900)}{8} = 10 \Rightarrow t_k = hk = 10k \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

$$q_k^1 = hf(t_k, y_k), \quad q_k^2 = hf(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}q_k^1)$$

$$p_{k+1} = p_k + q_k^2 \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

$$k = 0 : t_0 = 0, h = 10, p_0 = 76.1$$

$$q_0^1 = hf(t_0, p_0) = 12.9035$$

$$q_0^2 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, p_0 + \frac{q_0^1}{2}) = 13.7844$$

$$p_1 = p_0 + q_0^2 = 89.8844$$

$$k = 1 : t_1 = 10, h = 10, p_1 = 89.8844$$

$$q_1^1 = hf(t_1, p_1) = 14.7452, \quad q_1^2 = hf(t_1 + \frac{h}{2}, p_1 + \frac{q_1^1}{2}) = 15.6678$$

$$p_2 = p_1 + q_1^2 = 105.5523$$

Métodos Numéricos para EDO:

Método de Runge-Kutta Orden 3 para Problema Cauchy

- Método de Runge – Kutta de Orden 3:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad , \quad y(t = t_0) = y_0 \quad , \quad \forall t \in [t_0, T]$$

RK
Orden 3

$$y_0 \in \mathbb{R} \text{ dado}$$

$$q_k^1 = hf(t_k, y_k)$$

$$q_k^2 = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2}\right)$$

$$q_k^3 = hf(t_k + h, y_k - q_k^1 - 2q_k^2)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(q_k^1 + 4q_k^2 + q_k^3)$$

$$\text{Error : } \varepsilon_k \approx O(h^4)$$

Métodos Numéricos para EDO:

Método de Runge-Kutta Orden 4 para Problema Cauchy

- Método de Runge – Kutta de Orden 4:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad , \quad y(t = t_0) = y_0 \quad , \quad \forall t \in [t_0, T]$$

RK
Orden 4

$$y_0 \in \mathbb{R} \text{ dado}$$

$$q_k^1 = hf(t_k, y_k)$$

$$q_k^2 = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2}\right)$$

$$q_k^3 = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^2}{2}\right)$$

$$q_k^4 = hf(t_k + h, y_k + q_k^3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(q_k^1 + 2q_k^2 + 2q_k^3 + q_k^4)$$

$$\text{Error : } \varepsilon_k \approx O(h^5)$$

Métodos Numéricos para EDO:

Ejemplo Métodos Euler y Runge-Kutta Orden 4

$$y' = y - t^2 + 1 \quad t \in [0, 2] \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

t_k	Exacto	Euler	R-K Orden 4	Error R-K
0.0	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6574144	0.0000001
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8292983	0.0000003
0.3	1.0150706	1.0089334	1.0150701	0.0000005
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2140869	0.0000008
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4256384	0.0000010

Métodos Numéricos para EDO:

Métodos Multipasos Explícitos

- Un método multipaso de paso m para resolver el problema de Cauchy es de la forma:

$$y_{k+1} = a_k y_k + a_{k-1} y_{k-1} + \cdots + a_{k-(m-1)} y_{k-(m-1)} + h \left[b_k f(t_k, y_k) + b_{k-1} f(t_{k-1}, y_{k-1}) + \cdots + b_{k-(m-1)} f(t_{k-(m-1)}, y_{k-(m-1)}) \right]$$

- Se necesitan m valores iniciales: $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$
- Los coeficientes $a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-(m-1)}; b_k, b_{k-1}, \dots, b_{k-(m-1)}$ son las constantes del método y: $h = \frac{(T-t_0)}{n} \quad t_k = t_0 + kh \quad \forall k = 0, \dots, n$
- Por ejemplo: Adams –Bashforth $m=2$

$$y_{k+1} = y_k + h[3 f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})]$$

y_0, y_1 dados

Métodos Numéricos para EDO:

Métodos Multipasos Explícitos

■ Adams – Bashforth de 3 Pasos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} [23 f(t_k, y_k) - 16 f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 5 f(t_{k-2}, y_{k-2})]$$

y_0, y_1, y_2 dados

$$Error(k+1) = \frac{3}{8} y^{(4)}(\mu_{k+1}) h^3 \quad \mu_{k+1} \in [t_{k-2}, t_{k+1}]$$

■ Adams – Bashforth de 4 Pasos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} [55 f(t_k, y_k) - 59 f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 37 f(t_{k-2}, y_{k-2}) - 9 f(t_{k-3}, y_{k-3})]$$

y_0, y_1, y_2, y_3 dados

$$Error(k+1) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_{k+1}) h^4 \quad \mu_{k+1} \in [t_{k-3}, t_{k+1}]$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo

- Siguiendo con la formulación del problema de Cauchy, un sistema de primer orden de edo no-lineales es de la forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_1(t = t_0) = x_1^0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_2(t = t_0) = x_2^0$$

$\vdots$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_n(t = t_0) = x_n^0$$

$$\forall t \in [t_0, T]$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Modelo de Volterra - Lotka

- El modelo de Lotka - Volterra predice la evolución en el tiempo de una población con 2 especies, una depredadora $x_1(t)$ y la otra presa $x_2(t)$.
- Se supone que la población presa tiene suficiente comida y que su natalidad es proporcional a la cantidad de presas vivas: $k_1x_1(t)$.
- La mortalidad de la población presa depende del número de presas y depredadores: $k_2x_1(t)x_2(t)$.
- La natalidad de la población depredador es: $k_3x_1(t)x_2(t)$ y su mortalidad es: $k_4x_2(t)$.

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Modelo de Volterra - Lotka

- Se expresa el cambio en la poblaciones presa y depredador mediante el sedo:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = k_1 x_1(t) - k_2 x_1(t) x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = k_3 x_1(t) x_2(t) - k_4 x_2(t)$$

$$k_1 = 3, k_2 = 0.002$$

$$k_3 = 0.0006, k_4 = 0.5$$

$$x_1(1) = 1000$$

$$x_2(t = 1) = 500$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo

- Teorema: Supongamos que las funciones f_i son continuas y satisfacen la condición de Lipschitz en D :

$$|f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n) - f_i(t, v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq L \sum_{j=1}^n |u_j - v_j|$$

$$\forall u = (t, u_1, u_2, \dots, u_n), v = (t, v_1, v_2, \dots, v_n) \in D$$

$$D = \{(t, z_1, z_2, \dots, z_n) | 0 \leq t \leq T, -\infty < z_j < \infty \forall j = 1, \dots, n\}$$

- Entonces el sistema de edo no-lineales tiene solución única.
- La condición de Lipschitz se satisface si:

$$\left| \frac{\partial f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_j} \right| \leq L \quad \forall (t, u_1, u_2, \dots, u_n) \in D + f_i \in C^1$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Método de Euler

$$h = \frac{T}{n}, \quad t_k = kh \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

$$x_{ik} = x_i(t_k)$$

$$x_{10} = x_1(0)$$

$$\vdots$$

$$x_{n0} = x_n(0)$$

$$x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, \dots, x_{n,k+1} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall k \geq 0$$

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + hf_i(t_k, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall k \geq 0$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Runge – Kutta de Orden 2

$$h = \frac{T}{n}, t_k = kh \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

$$x_{ik} = x_i(t_k)$$

$$x_{10} = x_1(0), \dots, x_{n0} = x_n(0) \text{ Condiciones iniciales}$$

$$x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, \dots, x_{n,k+1} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall k \geq 0$$

$$q^1_{ik} = hf_i(t_k, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall k \geq 0$$

$$q^2_{ik} = hf_i(t_k + \frac{h}{2}, x_{1k} + \frac{1}{2}q^1_{1k}, x_{2k} + \frac{1}{2}q^1_{2k}, \dots, x_{nk} + \frac{1}{2}q^1_{nk})$$

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + q^2_{ik} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall k \geq 0$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Modelo de Volterra - Lotka

- Modelo de evolución de población presa - predador:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = k_1 x_1(t) - k_2 x_1(t) x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = k_3 x_1(t) x_2(t) - k_4 x_2(t)$$

$$k_1 = 3, k_2 = 0.002$$

$$k_3 = 0.0006, k_4 = 0.5$$

$$x_1(1) = 1000$$

$$x_2(t = 1) = 500$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Modelo Volterra-Lotka (Runge-Kutta 2)

- En la iteración k de RK 2 aplicada a este sedo, hay que calcular primero: q_{1k}^1, q_{2k}^1 luego q_{1k}^2, q_{2k}^2 y luego $x_{1,k+1}, x_{2,k+1}$

$$t \in [0, 4], n = 4, h = \frac{T}{n} = 1, t_k = k, k = 0, 1, \dots, 4$$

$$x_{1k} = x_1(t_k), x_{2k} = x_2(t_k)$$

$$x_{10} = x_1(0), x_{20} = x_2(0) \text{ c. i.}$$

$$x_{1k}, x_{2k} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, k = 0, 1, 2, 3 \text{ donde } x_{i,k+1} = x_{ik} + q_{ik}^2$$

$$q_{1k}^1 = hf_1(t_k, x_{1k}, x_{2k}),$$

$$q_{2k}^1 = hf_2(t_k, x_{1k}, x_{2k})$$

$$q_{1k}^2 = hf_1(t_k + \frac{h}{2}, x_{1k} + \frac{1}{2}q_{1k}^1, x_{2k} + \frac{1}{2}q_{2k}^1)$$

$$q_{2k}^2 = hf_2(t_k + \frac{h}{2}, x_{1k} + \frac{1}{2}q_{1k}^1, x_{2k} + \frac{1}{2}q_{2k}^1)$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Modelo Volterra-Lotka (Runge-Kutta 2)

$$f_1(t, x_1, x_2) = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, f_2(t, x_1, x_2) = k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2$$

$$\text{Iteración } k = 0 : t_0 = 0, h = 1, x_{10} = 1000, x_{20} = 500$$

$$q_{10}^1 = hf_1(x_{10}, x_{20}) = k_1 x_{10} - k_2 x_{10} x_{20} = 2000$$

$$q_{20}^1 = hf_2(x_{10}, x_{20}) = k_3 x_{10} x_{20} - k_4 x_{20} = 50$$

$$q_{10}^2 = hf_1(x_{10} + \frac{1}{2} q_{10}^1, x_{20} + \frac{1}{2} q_{20}^1) = 3900$$

$$q_{20}^2 = hf_2(x_{10} + \frac{1}{2} q_{10}^1, x_{20} + \frac{1}{2} q_{20}^1) = 367.5$$

$$x_{11} = x_{10} + q_{10}^2 = 4900$$

$$x_{21} = x_{20} + q_{20}^2 = 867.5$$

Y así sigue para $\left\{ \begin{array}{l} k = 1, t_0 = 1, h = 1 \\ x_{11} = 4900, x_{21} = 867.5 \end{array} \right.$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Runge – Kutta de Orden 3

$$h = \frac{T}{n}, t_k = kh \forall k = 0, 1, \dots, n$$

$$x_{ik} = x_i(t_k)$$

$$x_{10} = x_1(0), \dots, x_{n0} = x_n(0) \text{ Condiciones iniciales}$$

$$x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, \dots, x_{n,k+1}$$

$$q_{ik}^1 = hf_i(t_k, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$q_{ik}^2 = hf_i(t_k + \frac{h}{2}, x_{1k} + \frac{1}{2}q_{1k}^1, x_{2k} + \frac{1}{2}q_{2k}^1, \dots, x_{nk} + \frac{1}{2}q_{nk}^1) \quad i = 1, \dots, n$$

$$q_{ik}^3 = hf_i(t_k + h, x_{1k} - q_{1k}^1 - 2q_{1k}^2, x_{2k} - q_{2k}^1 - 2q_{2k}^2, \dots, x_{nk} - q_{nk}^1 - 2q_{nk}^2)$$

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + \frac{1}{6}(q_{ik}^1 + 4q_{ik}^2 + q_{ik}^3) \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall k \geq 0$$

Métodos Numéricos para EDO:

Sistemas de Edo: Runge – Kutta de Orden 4

$$h = \frac{T}{n}, t_k = kh \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

$$x_{ik} = x_i(t_k)$$

$$x_{10} = x_1(0), \dots, x_{n0} = x_n(0) \quad x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk} \Rightarrow x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, \dots, x_{n,k+1}$$

$$q^1_{ik} = hf_i(t_k, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$q^2_{ik} = hf_i(t_k + \frac{h}{2}, x_{1k} + \frac{1}{2}q^1_{1k}, x_{2k} + \frac{1}{2}q^1_{2k}, \dots, x_{nk} + \frac{1}{2}q^1_{nk}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$q^3_{ik} = hf_i(t_k + \frac{h}{2}, x_{1k} + \frac{1}{2}q^2_{1k}, x_{2k} + \frac{1}{2}q^2_{2k}, \dots, x_{nk} + \frac{1}{2}q^2_{nk}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$q^4_{ik} = hf_i(t_k + h, x_{1k} + q^3_{1k}, x_{2k} + q^3_{2k}, \dots, x_{nk} + q^3_{nk}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + \frac{1}{6}(q^1_{ik} + 2q^2_{ik} + 2q^3_{ik} + q^4_{ik}) \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall k \geq 0$$

Métodos Numéricos para EDO:

Edo de Orden Superior – Reducción a SEDO

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

$$x_1(t) \doteq y(t), x_2(t) \doteq y'(t), \dots, x_n(t) \doteq y^{(n-1)}(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\frac{dx_1}{dt} = y' = x_2 \quad x_1(t=0) = x_1^0 \doteq y_0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = y'' = x_3 \quad x_2(t=0) = x_2^0 \doteq y_0'$$

$\vdots$

$$\frac{dx_n}{dt} = y^{(n)} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_n(t=0) = x_n^0 \doteq y_0^{(n-1)}$$

Métodos Numéricos para EDO:

Edo de Orden Superior – Reducción a SEDO

■ Ejemplo: Modelo de Duffing:

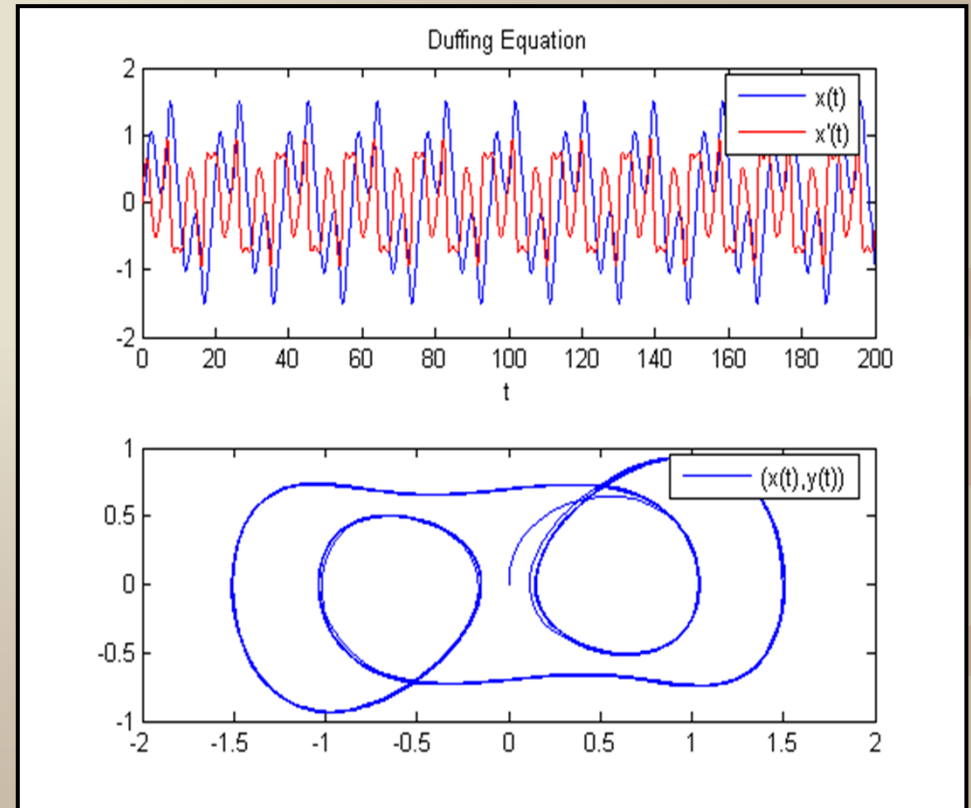
$$x'' + x' + (x^3 - x) = \cos(t)$$

$$x_1 \doteq x$$

$$x_2 \doteq x'$$

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -x_2 + x_1 - x_1^3 + \cos(t)$$



Métodos Numéricos para EDO:

Bibliografía

- 1) Burden, R., J.D. Faires, Numerical Analysis, Seventh Edition, Brooks Cole, 2000.
- 2) Gerald, C., P. O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, Seventh Edition, Pearson -- Addison Wesley, 2004.
- 3) Stoer, J., R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Third Edition, Springer, 1993.
- 4) Kiusalaas, J., Numerical Methods in Engineering with Matlab, Cambridge University press, 2005.