Ejercicio: Considere la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2y(1-y)}{2x+1}.$$

(a) Encuentre las soluciones constantes.

(b) Encuentre la solución general en forma implícita.

(c) Encuentre la solución general en forma explícita.

(d) Encuentre la solución particular que verifica $y(-1) = 2$.

Solución:

El dominio de la función $f(x,y) = \frac{2y(1-y)}{2x+1}$ es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -\frac{1}{2}\}$.

(a) Para hallar las soluciones constantes, hacemos:

$$2y(1-y) = 0 \Leftrightarrow y = 0,\ \ y = 1.$$

Luego, como $x \neq -\frac{1}{2}$ tenemos las siguientes soluciones constantes:

$$\varphi_1, \varphi_2 : (-\infty, -\frac{1}{2}) \to \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \ \varphi_1(x) = 0,\ \varphi_2(x) = 1,$$

y

$$\varphi_3, \varphi_4 : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \ \varphi_3(x) = 0,\ \varphi_4(x) = 1.$$

(b) Supongamos ahora que $y \neq 0, 1$. Entonces separamos variables e integramos:

$$\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int \frac{2}{2x+1} dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

lo cual es equivalente a:

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \int \frac{2}{2x+1} dx + c.$$

Así:

$$\ln\left(\left|\frac{y}{1-y}\right|\right) = \ln(c|2x+1|) \Rightarrow \frac{y}{1-y} = c(2x+1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) Para encontrar la solución explícita, despejamos y en función de x, obteniendo:

$$y(x) = \frac{c(2x+1)}{1+c+2xc}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Notemos que esta expresión no esta definida si $x = x(c) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2c}$ con $c \neq 0$.
Si $c > 0$, entonces $x(c) < -\frac{1}{2}$ y si $c < 0$, entonces $x(c) > -\frac{1}{2}$. Por lo que, dependiendo de la constante c, tenemos las siguientes soluciones:

(i) Para $c > 0$ tenemos $y_{c,1} : (-\infty, x(c)) \to \mathbb{R}$, $y_{c,2} : (x(c), -\frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, $y_{c,3} : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ definidas por $y_{c,i}(x) = \frac{c(2x+1)}{1+c+2xc}$ para $i = 1, 2, 3$.

(ii) Para $c < 0$ tenemos $y_{c,1} : (-\infty, -\frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, $y_{c,2} : (-\frac{1}{2}, x(c)) \to \mathbb{R}$, $y_{c,3} : (x(c), \infty) \to \mathbb{R}$ definidas por $y_{c,i}(x) = \frac{c(2x+1)}{1+c+2xc}$ para $i = 1, 2, 3$.

(d) Ahora, busquemos c tal que $y(-1) = 2$.

$$2 = \frac{c(2(-1)+1)}{1+c+2(-1)c} = \frac{-c}{1-c} \ \ \Rightarrow \ \ c = 2.$$

Como $c = 2 > 0$ estamos en el caso (i) de la parte (c). Además, $x(c) = -\frac{3}{4}$ y $(-1) \in (-\infty, -\frac{3}{4})$. Así, nuestra solución particular es:

$$y_p : (-\infty, -\frac{3}{4}) \to \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ y_p(x) = \frac{4x+2}{3+4x}.$$

Obs. Las soluciones constantes no son singulares, pues basta tomar $c = 0$ para obtener $y = 0$, y $c = \frac{1}{c_1}$ con $c_1 = 0$ para obtener $y = 1$. (Esta sustitución es hecha en la parte (b)).