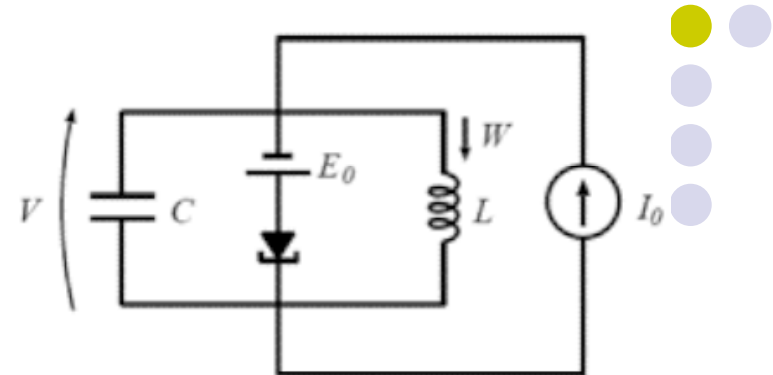
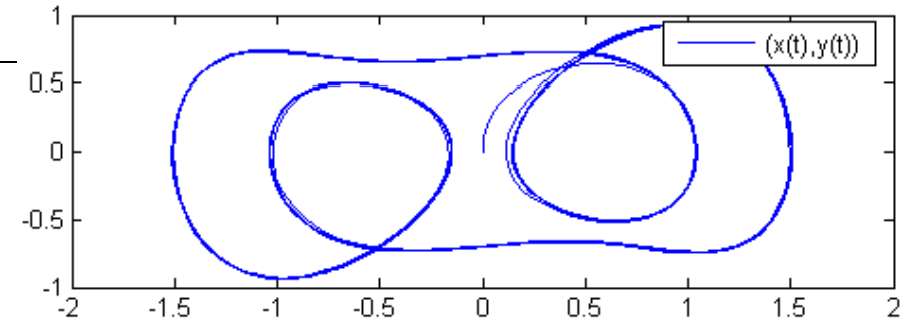
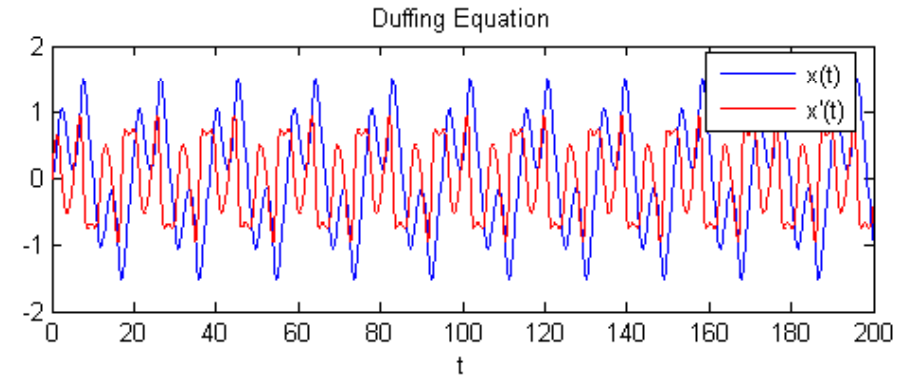
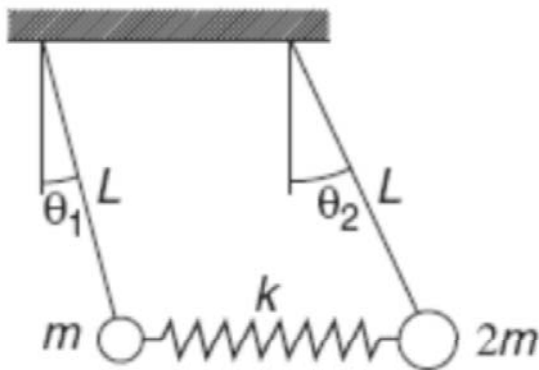
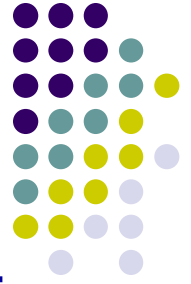


# Ec. Diferenciales Ordinarias

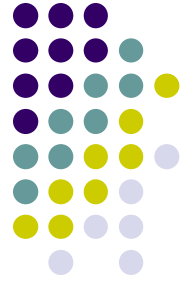
Gonzalo Hernández  
UChile - CMM



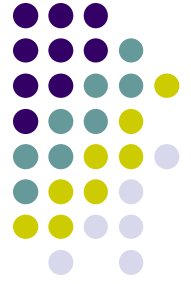
# Descripción EDO: Objetivos



- 1) Resolver edo y sistemas lineales edo usando métodos clásicos.
- 2) Interpretar geométricamente el problema de valor inicial en términos de curvas integrales.
- 3) Aplicar el teorema de existencia y unicidad y conocer ejemplos donde no hay unicidad o existencia global.
- 4) Conocer y aplicar los métodos numéricos de Runge-Kutta de orden 2 y su implementación en Matlab, Maple o Scilab.
- 5) Estudiar el comportamiento cualitativo de sistemas no lineales.
- 6) Comprender el rol de las edo en la modelación de fenómenos de la vida real; péndulo no-lineal, sistemas lineales de vibraciones mecánicas, modelos de dinámica de poblaciones.



- 0) Motivación: Modelación utilizando EDO
- 1) EDO de primer orden (3 semanas)
- 2) EDO lineales de orden  $n$  (4 semanas)
- 3) Transformada de Laplace (2 semanas)
- 4) Sistemas lineales de EDO (3 semanas)
- 5) Sistemas no lineales de EDO (3 semanas)



## 0) Motivación: Modelación utilizando EDO

### 1) EDO de primer orden (3 semanas)

- Descripción cualitativa edo primer orden. Curva integral
- Ecuaciones de variable separable. Ecuaciones homogéneas.
- Modelación usando EDOs de primer orden.
- Resolución EDO lineales de primer orden homogéneas y no homogéneas utilizando el factor integrante.
- Ecuación de Bernoulli y de Ricatti.
- Teorema de existencia y unicidad para problema valor inicial.
- Métodos numéricos tipo Runge-Kutta.



## 2) EDO lineales de orden $n$ (4 semanas)

- Existencia de base soluciones de edo lineales homogéneas de orden  $n$ . Wronskiano.
- Edo lineales homogéneas orden 2. Fórmula Abel. Problema vibraciones mecánicas.
- Edo lineales no homogéneas orden 2. Fórmula de variación de parámetros. Función de Green.
- Edo lineales de orden 2 con condiciones de borde.
- Series de potencia para edo no homogéneas de orden 2 con puntos singulares. Método de Frobenius.
- Edo lineales homogéneas orden  $n$ . Polinomio característico. Ecuación de Euler – Cauchy.
- Edo lineales no homogéneas orden  $n$ . Met. coef. indeterminados.

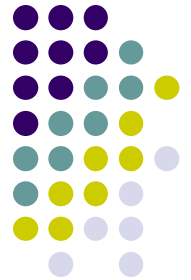


## 3) Transformada de Laplace (2 semanas)

- Definición, ejemplos y fórmulas básicas. Fórmula de convolución.
- Resolución de edo lineales usando transformada de Laplace.
- Función de Heaviside y delta de Dirac. Resolución de edo lineales con lados derechos generalizados.

## 4) Sistemas lineales de EDO (3 semanas)

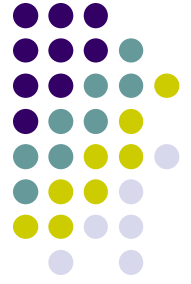
- Problema valor inicial para un sistema lineal. Matriz fundamental.
- Problema de valor inicial para un sistema lineal a coeficientes constantes. Cálculo de la matriz exponencial.
- Análisis del comportamiento asintótico de las soluciones en función de los valores propios.
- Diagramas de fase para el caso 2x2.
- Fórmula de variación de parámetros para sist. Lineales no homog.



## 5) Sistemas no lineales de EDO (3 semanas)

- Sistemas hamiltonianos y conservación de energía. Análisis de algunos casos simples.
- Clasificación de puntos críticos. Estabilidad asintótica. Uso de coordenadas polares.
- Análisis de algunos sistemas no-lineales clásicos: Sistema de Volterra.
- Funcional de Lyapunov y estabilidad. Estudio de sistemas que provienen de gradientes.

# Organización de la Sesiones



- 2 Clases de cátedra a la semana: Martes y jueves 14:30 hrs.
- 1 Clase auxiliar a la semana: Viernes 14:30 hrs.

Francisco Bravo

Pedro Montealegre

- En U-Cursos se publicará el material del curso: Clases +  
Notas + Laboratorios + Pautas



1) Tres controles (semanas 4,8,12).

Nota eximición según reglamento: 5.5

2) Ayudantía + Laboratorios Matlab:

- L1: Algebra Lineal Numérica
- L2: Ecuaciones Diferenciales
- L3: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

3) Cálculo nota final:  $NF = (NC)*0.75 + (NA)*0.25$

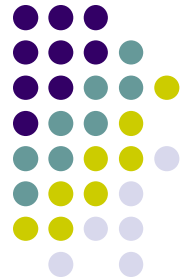
# Evaluación: Laboratorio de Matlab para EDO



- 1) Capacidades básicas de cálculos matemáticos
- 2) Herramientas de visualización de resultados
- 3) Más de 30 Toolboxes:
  - Curve Fitting, Splines, Optimization, PDE, Symbolic, Statistics
  - Neural Networks, Genetic Algorithms, etc.
  - Signal & Image Processing, Bioinformatics, Control, Financial, etc.
- 4) Funciones .m y programación
- 5) Tools: Taylor, Spline, Curve Fitting, etc
- 6) **Help !**, Libros, Manuales
- 7) File Exchange, Webminars
- 8) Cálculos complejos lentos + Traducción a C/C++ deficiente

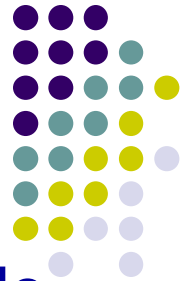


# Evaluación: Laboratorio de Matlab para EDO



- Objetivos del Laboratorio:
  - Utilizar algunos Métodos Numérico + Matlab como herramienta para resolver edos no lineales.
  - Conocer algunos modelos en en Ciencias e Ingeniería.
- Algunos links de interés:
  - Home Matlab: <http://www.mathworks.com/>
  - Documentación Oficial:  
<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/helpdesk.html>
  - File Exchange:  
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/>

# Motivación EDO



- Desde el siglo 18, las leyes físicas del universo han sido descritas, principalmente, por edo o edp.
- Estas ecuaciones tienen derivadas de funciones que se desconocen y que representan la fuerza, presión, temperatura, potencial electromagnético, etc. La edo más conocida es la segunda ley de Newton:

$$f(t) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- donde  $x(t)$  es la posición de un cuerpo de masa  $m$ , constante, que se mueve horizontalmente debido a la acción de una fuerza  $f(t)$ .
- Esta ley que fue publicada en 1687 en la obra "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica".

# Motivación EDO



## THE GRAND CHALLENGE EQUATIONS

$$\begin{aligned}
 &B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \sum_j B_j A_j F_{ji} & \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{F} = m \vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \\
 &dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S dV & \nabla \cdot \vec{D} = \rho & Z = \sum_j g_j e^{-E_j/kT} \\
 &F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{2\pi i k j/N} & \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} & \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \\
 & & p_{n+1} = r p_n (1 - p_n) & \nabla \cdot \vec{B} = 0 & P(t) = \frac{\sum_i W_i B_i(t) P_i}{\sum_i W_i B_i(t)} \\
 & -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \Psi(r,t) + V \Psi(r,t) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} & & -\nabla^2 u + \lambda u = f \\
 & \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \gamma \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{F} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f
 \end{aligned}$$

• NEWTON'S EQUATIONS • SCHRÖDINGER EQUATION (TIME DEPENDENT) • NAVIER-STOKES EQUATION •  
 • POISSON EQUATION • HEAT EQUATION • HELMHOLTZ EQUATION • DISCRETE FOURIER TRANSFORM •  
 • MAXWELL'S EQUATIONS • PARTITION FUNCTION • POPULATION DYNAMICS •  
 • COMBINED 1ST AND 2ND LAWS OF THERMODYNAMICS • RADIOSITY • RATIONAL B-SPLINE •

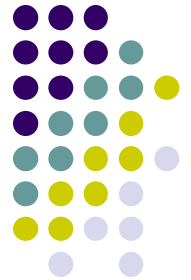
# Motivación EDO



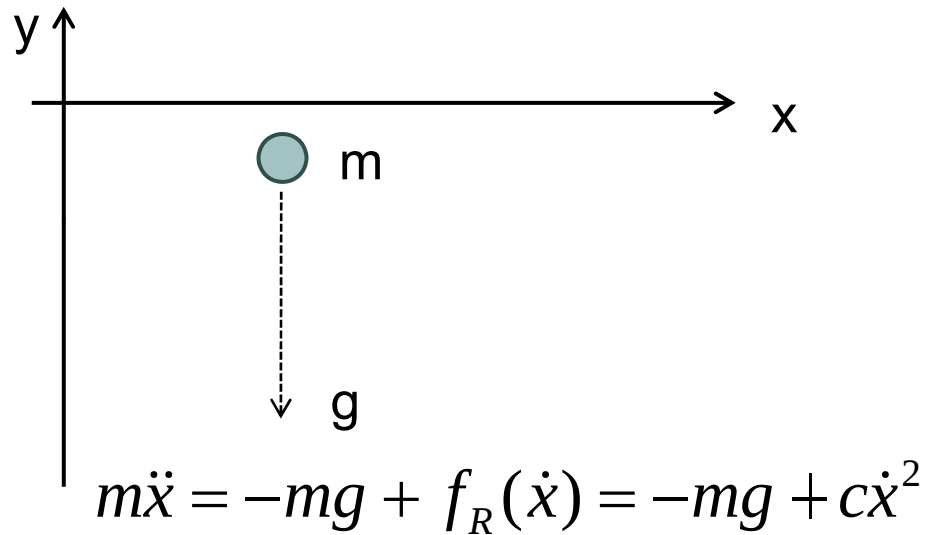
- En Ciencia e Ingeniería, las ec. diferenciales representan (modelan) el comportamiento de un sistema real.
- Se obtienen como resultado de un proceso iterativo de abstracción, análisis, hipótesis, verificación y validación.
- Se pueden clasificar de acuerdo a:
  - Tipo: Ordinaria o parcial
  - Orden: Primer o orden superior
  - Linealidad o No-Linealidad
  - Coeficientes: Constantes o Variables
  - Lado derecho: Homogénea o No Homogénea
- Forma general de una edo lineal:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = Q(x)$$

# Motivación: Modelación con EDO



## ■ Trayectorias de partículas: Caída Libre

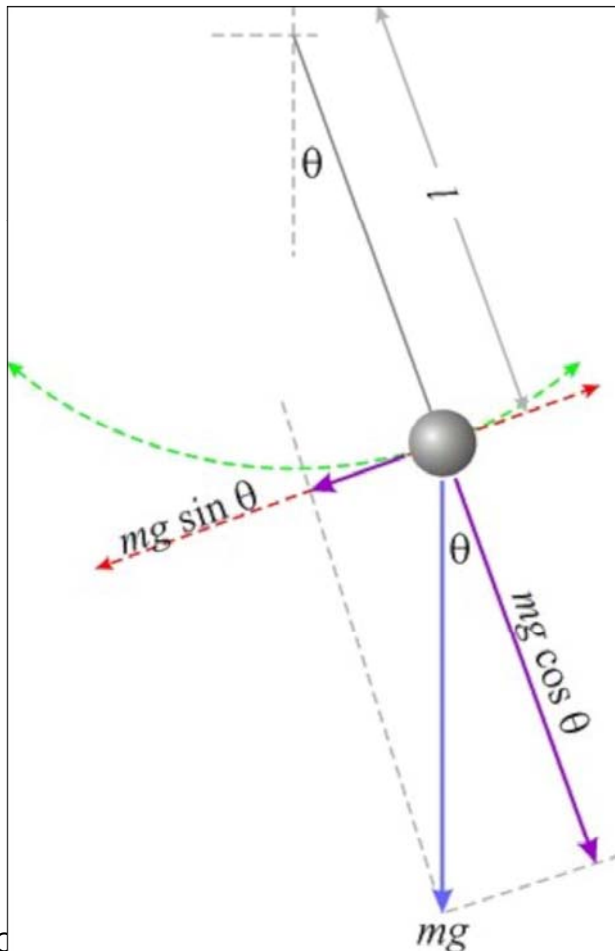


- Lanzamiento de proyectiles
  - Movimiento planetario
- Coeficiente de viscosidad

# Motivación: Modelación con EDO



- Trayectorias de partículas: Ecuación del Péndulo Simple:



$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin(\theta)$$

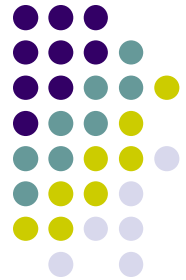
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 + O(\theta^7)$$

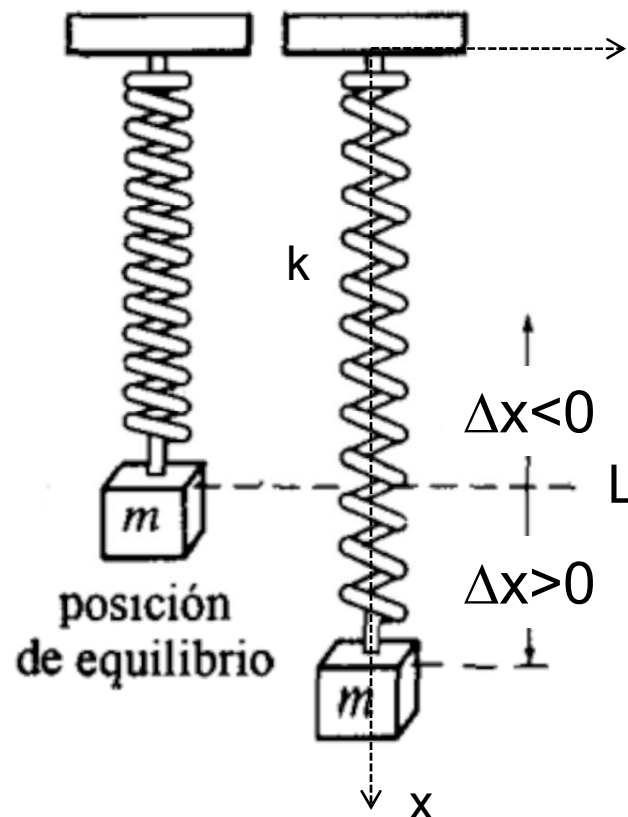
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l} \theta$$

$$\theta(t) \approx c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

# Motivación: Modelación con EDO



- Movimiento armónico: Masa colgando de un resorte



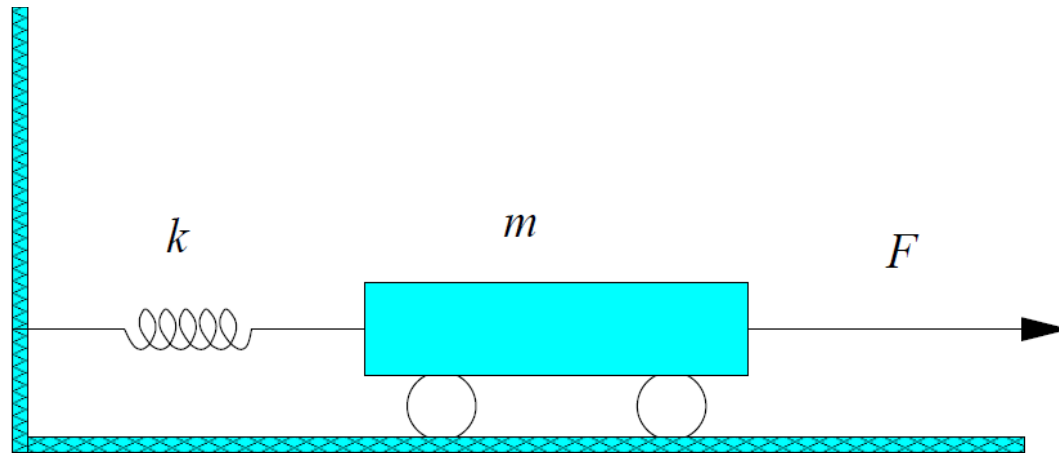
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k \Delta x$$

$$= mg - k(x - L)$$

# Motivación: Modelación con EDO

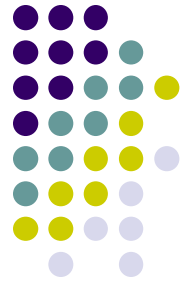


- Movimiento armónico: Ejemplo simple

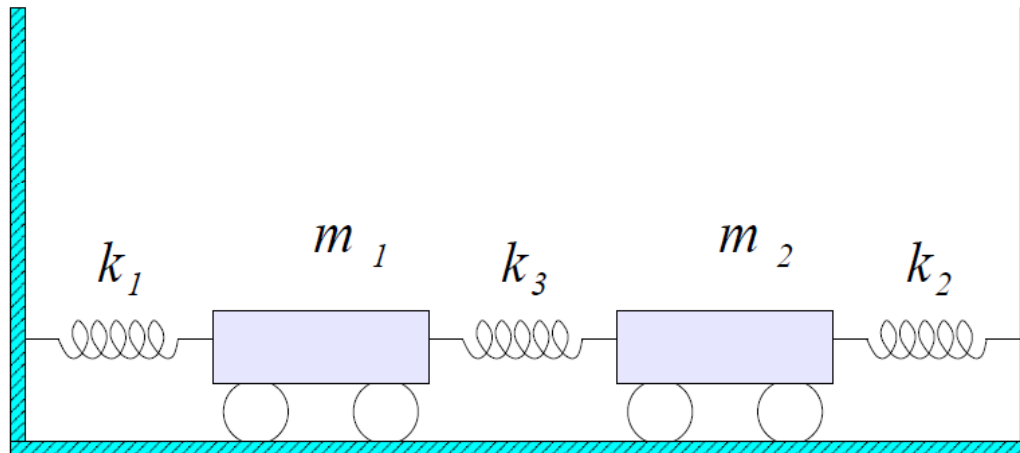


$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_E + F_R + F(t) \\ &= -kx - \mu mg + F(t) \end{aligned}$$

# Motivación: Modelación con EDO



- Movimiento armónico acoplado: Ejemplo simple



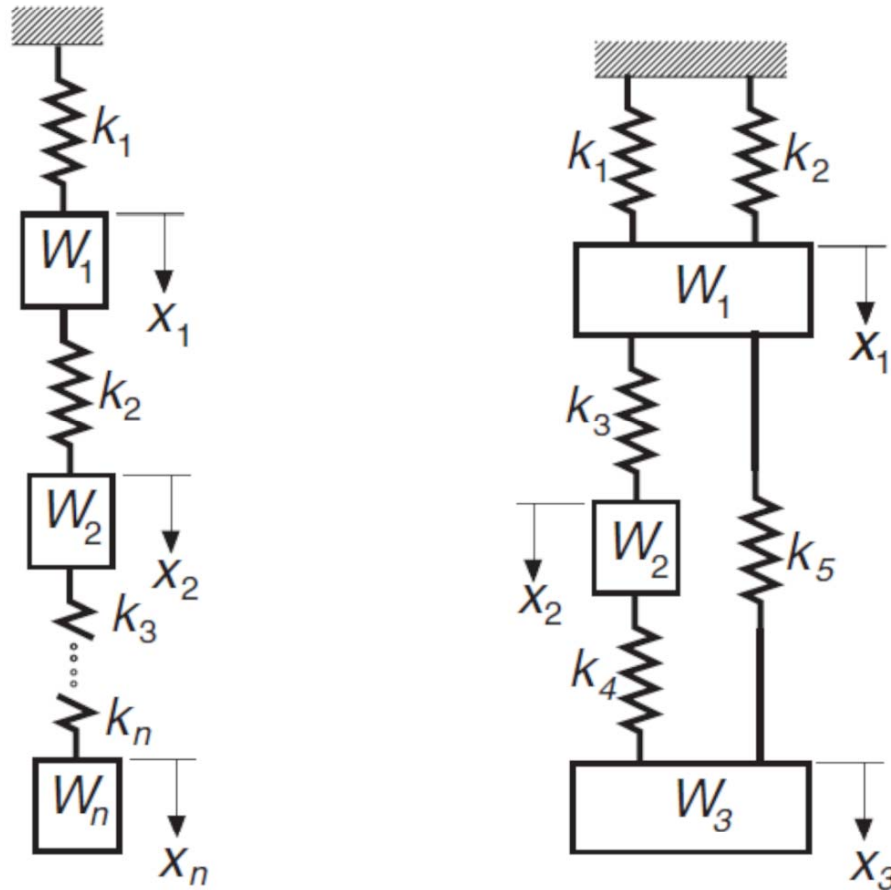
$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_3(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_3)x_1 + k_3 x_2$$

$$m_2 x_2'' = -k_3(x_2 - x_1) - k_2 x_2 = k_3 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

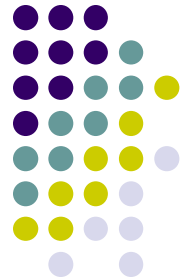
# Motivación: Modelación con EDO



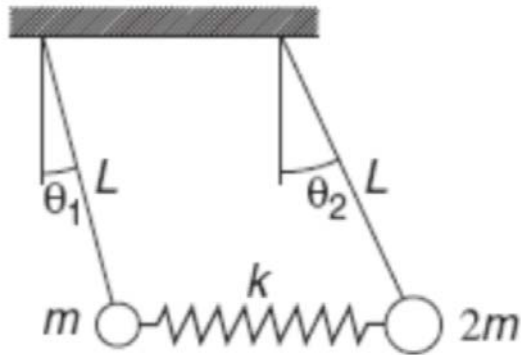
- Movimiento armónico acoplado: Masas colgando de resortes



# Motivación: Modelación con EDO



- Movimiento armónico: Masas ligadas por un resorte



$$\begin{aligned}
 kL(\theta_2 - \theta_1) - mg \sin(\theta_1) &= mL \ddot{\theta}_1 \\
 -kL(\theta_2 - \theta_1) - 2mg \sin(\theta_2) &= 2mL \ddot{\theta}_2
 \end{aligned}$$

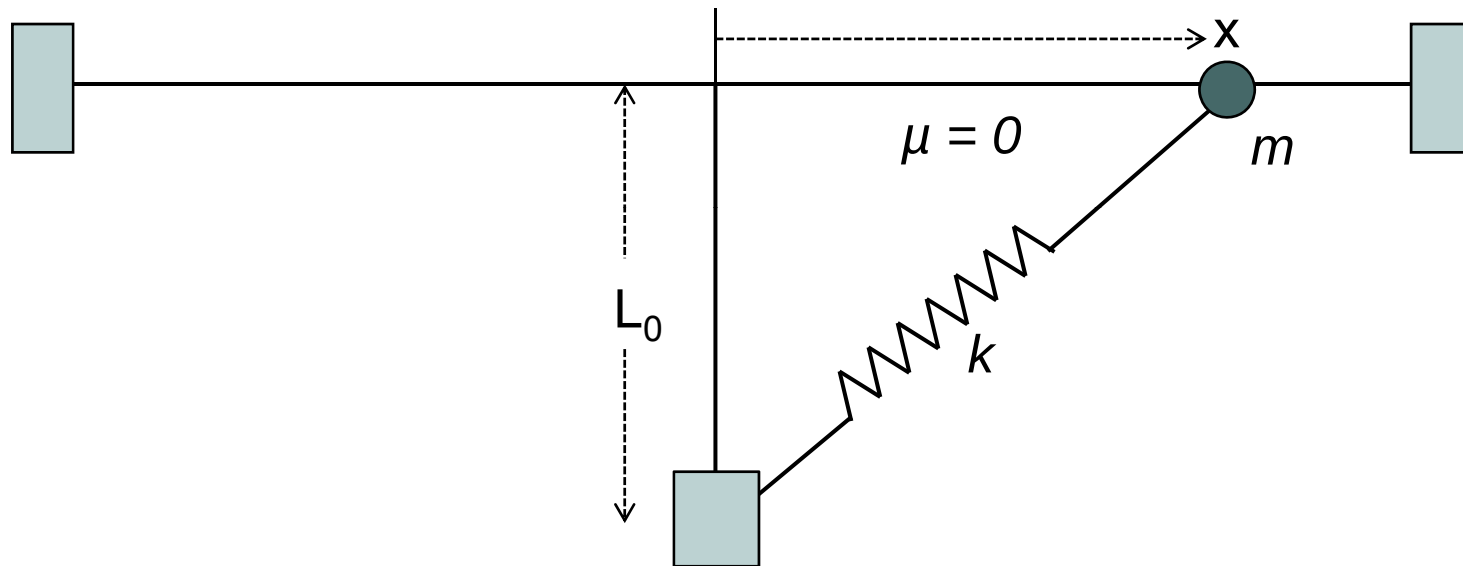
- Esta edo de segundo orden se puede llevar a un sistema de edo de primer orden, utilizando las transformaciones:

$$y_1(t) = \theta_1(t) \quad y_2(t) = \theta_2(t) \quad y_3(t) = \frac{d\theta_1}{dt} \quad y_4(t) = \frac{d\theta_2}{dt}$$

# Motivación: Modelación con EDO

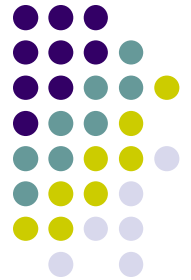


- Movimiento Armónico: Masa ligada a resorte en ángulo



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}\right)$$

# Motivación: Modelación con EDO



- Ecuación de Duffing:

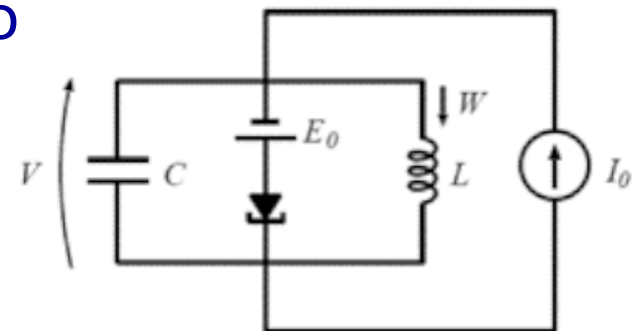
Esta edo no-lineal se utiliza para describir diferentes sistemas dinámicos (resortes, transformadores, etc).

La forma más general de esta ecuación es:

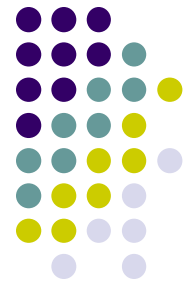
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \delta \frac{dx(t)}{dt} + (\beta x^3(t) \pm \omega_0^2 x(t)) = \gamma \cos(\omega t + \phi)$$

Por ejemplo, la edo del flujo magnético de un transformador tiene la forma:

$$\ddot{\phi} + b\phi^3 + \omega_0^2 \phi = \frac{\omega}{N} E \cos(\omega t)$$



# Motivación: Modelación con EDO



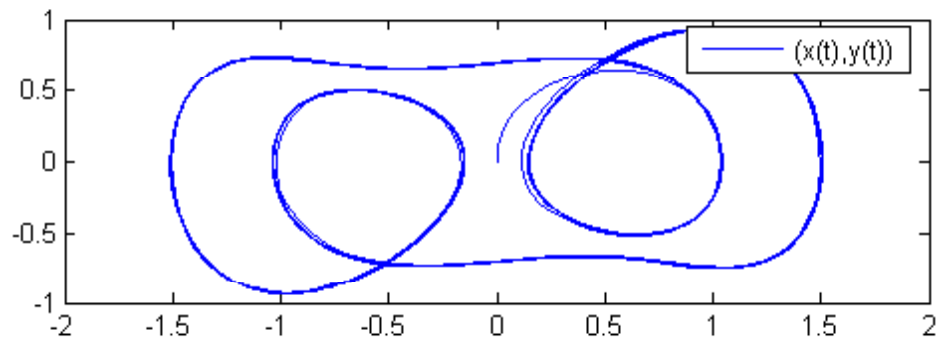
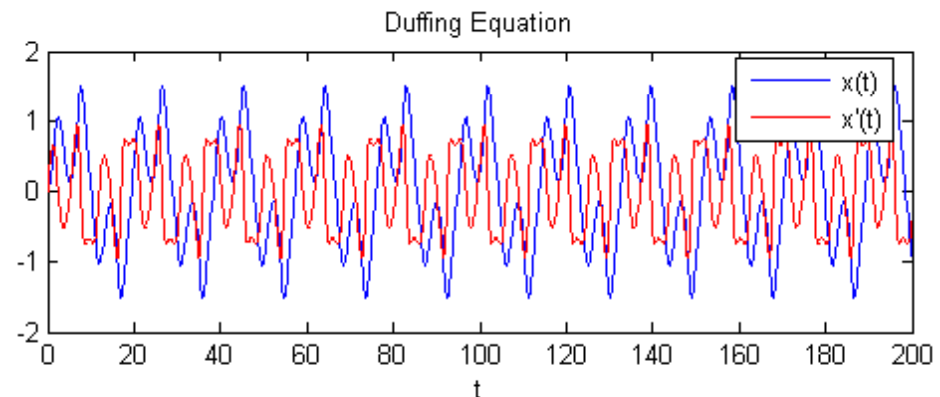
## ■ Ejemplo Ecuación de Duffing:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (\beta x^3 \pm \omega_0^2 x) = \gamma \cos(\omega t + \phi)$$

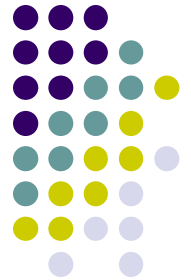
$$\delta = 1, \beta = 1, \omega_0 = 1$$

$$\gamma = 1, \omega = 1, \phi = 0$$

Ejemplo de caos  
“ordenado”



## Motivación: Modelación con EDO



- Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:  
La población  $p(t)$  de EEUU en el siglo 20 crece aproximadamente según la edo no lineal logística:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p(t) - \beta p(t)^2 \quad \forall t \in [t_0, T]$$
$$p(0) = p_0$$

- Aplicando un proceso de ajuste de parámetros, los modeladores determinaron que:

$$\alpha = 0.02$$

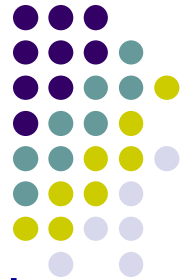
$$\beta = 0.00004$$



## ■ Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:

| Año  | Tiempo $t_k$ | $p(t)$ real [millones de personas] | Año  | Tiempo $t_k$ | $p(t)$ real [millones de personas] |
|------|--------------|------------------------------------|------|--------------|------------------------------------|
| 1890 | -10.0        | 62.9798                            | 1900 | 0.0          | 76.2122                            |
| 1880 | -20.0        | 50.1892                            | 1910 | 10.0         | 92.2285                            |
| 1870 | -30.0        | 38.5584                            | 1920 | 20.0         | 106.0215                           |
| 1860 | -40.0        | 31.4433                            | 1930 | 30.0         | 123.2026                           |
| 1850 | -50.0        | 23.1919                            | 1940 | 40.0         | 132.1646                           |
| 1840 | -60.0        | 17.0634                            | 1950 | 50.0         | 151.3258                           |
| 1830 | -70.0        | 12.8607                            | 1960 | 60.0         | 179.3232                           |
| 1820 | -80.0        | 9.6384                             | 1970 | 70.0         | 203.3020                           |
| 1810 | -90.0        | 7.2399                             | 1980 | 80.0         | 226.5422                           |
| 1800 | -100.0       | 5.3085                             | 1990 | 90.0         | 248.7099                           |
|      |              |                                    | 2000 | 100.0        | 281.4219                           |

# Motivación: Modelación con EDO



- De acuerdo a los datos reales de la transparencia anterior:
- Se puede afirmar que el modelo es adecuado ?
- Cuál es error entre 1900 y 1980 ?

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p(t) - \beta p^2(t)$$

$$p(t) = \frac{500}{\left(1 + \frac{4239}{761} e^{-\frac{1}{50}t}\right)} \quad \begin{array}{l} \text{solución} \\ \text{exacta} \end{array}$$

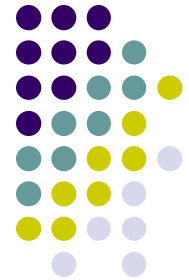
$$p_{k+1} = p_k + h(\alpha p_k - \beta p_k^2)$$

$$p_k = p(t = t_k) \quad \forall k = 0, \dots, 8 = n$$

$$h = \frac{(T - t_0)}{n} = \frac{(1980 - 1900)}{8} = 10$$

$$t_k = hk = 10k \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

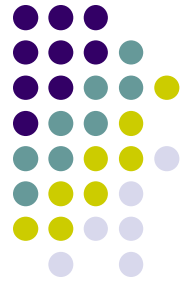
# Motivación: Modelación con EDO



## ■ Modelo de Crecimiento Logístico de una Población:

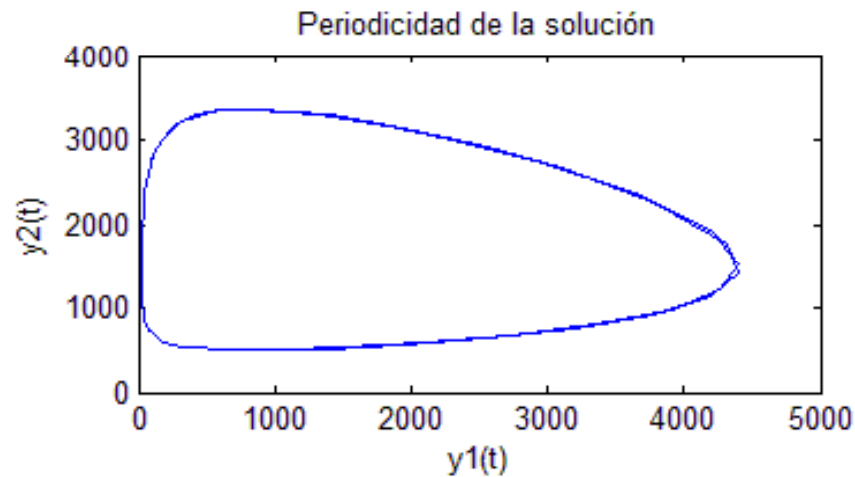
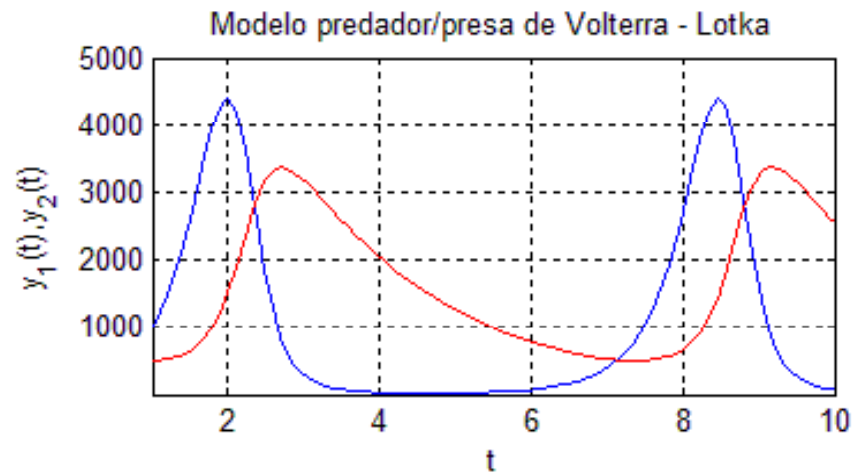
| Año  | Tiempo $t_k$ | $p(t)$ real | $p(t)$ Edo | $p(t)$ Euler | Error1 | Error2 |
|------|--------------|-------------|------------|--------------|--------|--------|
| 1900 | 0.0          | 76.1        | 76.1       | 76.1         | 0.0    | 0.0    |
| 1910 | 10.0         | 92.4        | 89.9       | 89.0         | 2.5    | 0.9    |
| 1920 | 20.0         | 106.5       | 105.6      | 107.5        | 0.9    | -1.9   |
| 1930 | 30.0         | 123.1       | 123.2      | 123.3        | -0.1   | -0.1   |
| 1940 | 40.0         | 132.6       | 142.7      | 141.7        | -10.1  | 1.6    |
| 1950 | 50.0         | 152.3       | 164.0      | 152.1        | -11.7  | 11.9   |
| 1960 | 60.0         | 180.7       | 186.7      | 173.5        | -6.0   | 13.2   |
| 1970 | 70.0         | 204.9       | 210.6      | 203.8        | -5.7   | 6.8    |
| 1980 | 80.0         | 226.5       | 235.3      | 229.1        | -8.8   | 6.2    |
| 1990 | 90.0         | 248.7       | 260.3      | 253.9        | -11.6  | 6.4    |
| 2000 | 100.0        | 281.4       | 285.1      | 278.9        | -3.7   | 6.2    |

## Motivación: Modelación con EDO



- El modelo de Lotka - Volterra predice la evolución de una población con especies depredadora  $x_1(t)$  y presa  $x_2(t)$ .
- Se supone que la población presa tiene suficiente comida y que su natalidad es proporcional a la cantidad de presas vivas:  $k_1x_1(t)$ .
- La mortalidad de la población presa depende del número de presas y depredadores:  $k_2x_1(t)x_2(t)$ .
- La natalidad de la población depredador es:  $k_3x_1(t)x_2(t)$  y su mortalidad es:  $k_4x_2(t)$ .
- Se expresa el cambio en la poblaciones presa y depredador mediante el sistema de edos:

# Motivación: Modelación con EDO



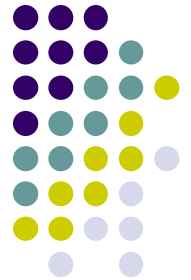
$$\frac{dy_1}{dt} = k_1 y_1 - k_2 y_1 y_2$$

$$k_1 = 3 \quad k_2 = 0.002 \quad y_1(t_0 = 1) = 1000$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k_3 y_1 y_2 - k_4 y_2$$

$$k_3 = 0.0006 \quad k_4 = 0.5 \quad y_2(t_0 = 1) = 500$$

## Motivación: Modelación con EDO



- El proceso químico de decaimiento del ozono ( $O_3$ ) en la alta atmósfera debido al efecto de la radiación del sol se describe mediante la fórmula:

$$\frac{dy_1}{dt} = -k_1 y_1 y_3 + k_2 y_2 y_3^2 - k_3 y_1 y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k_1 y_1 y_3 - k_2 y_2 y_3^2 - k_3 y_1 y_2$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -k_1 y_1 y_3 + k_2 y_2 y_3^2 + k_3 y_1 y_2$$

- Donde
- $k_1, k_2, k_3$  son los parámetros cinéticos
- $y_1, y_2, y_3$  son las concentraciones de  $O_3, O, O_2$

## Motivación: Modelación con EDO



- Para simplificar este sistema usualmente se supone que la concentración de  $O_2$  es constante. Dándole valor a las constantes y re-escalando se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -y_1 - y_1 y_2^2 + 294 y_2 & y_1(0) &= 1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{(y_1 - y_1 y_2)}{98} - 3y_2 & y_2(0) &= 0\end{aligned}$$

## Bibliografía:



- 1) Burden, R., J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
- 2) Gerald, C.F., P.O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, Pearson, 2004.
- 3) Gilat, A., MATLAB: An Introduction with Applications, John Wiley & Sons, 2008.
- 4) Kiusalaas, J., Numerical Methods in Engineering with Matlab, Cambridge University Press, 2005.
- 5) Yang, W.Y., W. Cao, T.S. Chung, J. Morris, Applied Numerical Methods Using MATLAB, by, Wiley, 2005.