MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-02
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

1. Ecuación lineal de primer orden.

1.1. Variables Separables.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{g(x)}{h(y)} \\ \int_{y(x_0)}^{y(x)} h(s)ds &= \int_{x_0}^{x} g(t)dt \\ H(y) - H(y(x_0)) &= G(x) - g(x_0) \\ H(y) &= G(x) + \underbrace{H(y(x_0)) - G(x_0)}_{K} \end{aligned}$$

1.2. Factor integrante.

Consideremos la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = f(t)$$

al multiplicarla por $e^{\int p(t)dt}$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}e^{\int p(t)dt} + ye^{\int p(t)dt}p(t) &= f(t)e^{\int p(t)dt} \\ \frac{d}{dt}\left(ye^{\int p(t)dt}\right) &= f(t)e^{\int p(t)dt} \end{aligned}$$

Integrando con respecto a t, se obtiene finalmente

$$y(t) = Ke^{-\int p(t)dt} + e^{-\int p(t)dt}\int f(s)e^{\int p(s)ds}$$

2. Ecuaciones reducibles a lineales.

2.1. Ecuaciones Homogéneas.

Dado $k \in \mathbb{N}$, se dice que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es **homogénea de grado** k si $f(st, sy) = \pm s^k f(t, y)$. El cuociente de dos funciones f, g homogéneas de grado k da por resultado:

$$\frac{f(t,y)}{g(t,y)} = \frac{f(t, t \cdot \frac{y}{t})}{g(t, t \cdot \frac{y}{t})} = \frac{\pm t^k f(1, \frac{y}{t})}{\pm t^k g(1, \frac{y}{t})} = h\left(\frac{y}{t}\right)$$

Consideremos la ecuación

$$y' = \frac{f(t,y)}{g(t,y)} = h\left(\frac{y}{t}\right)$$

y el cambio de variable $y = zt$, de lo que resulta

$$z' = \frac{h(z) - z}{x}$$

que es una ecuación a variables separables.

2.2. Ecuación de Bernoulli.

$$y' + P(t)y = Q(t)y^m, \quad m \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$$

basta considerar el cambio de variable $z = y^{1-m}$, multiplicar la ecuación por $(1 - m)y^{-m}$ y reemplazar, de lo cual resulta

$$z' + (1 - m)P(t)z = (1 - m)Q(t)$$

que es una EDO lineal de primer orden.

2.3. Ecuación de Ricatti.

$$y' = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

supongamos conocida una solución y_1. Para encontrar las otras soluciones, se define $y(t) = y_1(t) - \dfrac{1}{z(t)}$. Reemplazando se obtiene

$$z' + (2p(t)y_1(t) + q(t))z = -p(t)$$

que es una EDO lineal de primer orden no homogénea.

3. Ecuaciones de orden 2 reducibles a orden 1.

Una EDO de segundo orden se escribe de la forma $F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0$. Algunas de estas ecuaciones pueden ser reducidas a una de orden menor mediante la sustitución $p = y'$. A continuación se ilustran los dos casos posibles:

- **Caso 1:** $F(x,\ y,\ y',\ y'') = G(x,\ y,\ y'') = 0$, es decir cuando no aparece $y(x)$ explícitamente. Con la sustitución $y' = p$, la ecuación original se reduce a la ecuación de primer orden

$$G\left(x,\ p,\ \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

- **Caso 2:** $F(x,\ y,\ y',\ y'') = H(y,\ y',\ y'') = 0$, es decir x no aparece explícitamente en la ecuación.
  Con la sustitución $y' = p$, usando la regla de la cadena queda

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

  A continuación, se tiene una EDO de primer orden (cuya variable independiente es y) de la forma

$$H\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$