

MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-02

Profesor: Julio López.

Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 12 12/noviembre

P1. Encuentre la solución general del sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$$

P2. Se estudiará el comportamiento de una plaga de termitas sometida a control biológico mediante la presencia de dos clases de insectos como termitas. Se definen las variables:

$$\begin{aligned} T(t) & : \text{área controlada por termitas en el tiempo } t \\ X(t) & : \text{área controlada por el insecto X en el tiempo } t \\ Y(t) & : \text{área controlada por el insecto Y en el tiempo } t \end{aligned}$$

Diremos que una especie muere si existe un tiempo $t > 0$ tal que el área que controla la especie en t sea cero.

Planteamos el siguiente modelo:

$$T'(t) = T(t) - X(t) + Y(t) \tag{1}$$

$$X'(t) = X(t) - 2Y(t) \tag{2}$$

$$Y'(t) = -Y(t) \tag{3}$$

1. Encuentre las cantidades de $T(t)$, $X(t)$ e $Y(t)$ con las condiciones iniciales positivas T_0 , X_0 e Y_0 y responda:
2. Es posible exterminar a las termitas sólo con una especie de insectos?Cuál sería? En cuánto tiempo?
3. Un entomólogo opina que la plaga se extinguirá más rápido mientras mayor sea la cantidad inicial de insectos exterminadores. Qué opina de esto? Según usted qué efecto no considera el entomólogo?
4. Suponga ahora que hay una entrada/salida de insectos periódica de carácter estacional de forma que a cada ecuación del sistema se le suma un término "cos t". Calcule la solución particular asociada, considerando $T_0 = X_0 = Y_0 = 0$

P3. Una nave espacial ha sido atrapada por la fuerza gravitacional de un planeta que se encuentra en el origen. Los propulsores de la nave, debido a esta fuerza gravitacional, no actúan en una dirección fija. Llamando $x_i(t)$ a la posición de la nave según el eje x_i , $i = 1, 2, 3$, y $X = (x_1, x_2, x_3)^t$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$X' = \begin{bmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix} X$$

1. Encuentre la solución del sistema anterior en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.
2. Para qué valores de b la nave escapará de la atracción del planeta? Es decir, independientemente de la posición inicial de la nave (que no puede ser $(0, 0, 0)$), se tiene que $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.
3. En el caso que b cumpla la condición anterior, cuál es la condición inicial para que la nave escape más rápido? Por qué con esta condición inicial la trayectoria de la nave es una línea recta?