MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-02
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 08: Transformada de Laplace
15/Octubre

P3. Resuelva la siguiente EDO:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 13y &= e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Sol. Denotamos por $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Usando el teorema 4 (*transformadas de una derivada*) calculamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2Y(s) - s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) &= sY(s) - y(0) \\ & sY(s) - 1 \end{aligned}$$

Aplicando Transformada de Laplace en la EDO, basta reemplazar lo anterior y obtenemos:

$$\begin{aligned} [s^2Y(s) - s] + 4[sY(s) - 1] + 13Y(s) &= \frac{1}{s-1} \\ Y(s) &= \underbrace{\frac{s+4}{s^2+4s+13}}_{I} + \underbrace{\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+4s+13}}_{II} \end{aligned}$$

Para encontrar $y(t)$, aplicamos Antitransformada y concluimos. Sin embargo, debemos determinar de qué funciones $f(t)$ y $g(t)$ los términos I y II son sus respectivas transformadas. Notemos que $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 3^3$, con esto:

$$I = \frac{s+4}{(s+2)^2+3^3} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^3} + \frac{2}{(s+2)^2+3^3}$$

Es claro (en base al *primer teorema de traslación*):

$$\begin{aligned} \frac{s+2}{(s+2)^2+3^3} &= \mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) \\ \frac{2}{(s+2)^2+3^3} &= \frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^3} \\ &= \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s) \end{aligned}$$

Respecto a I, concluimos

$$I = \mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)$$

Para trabajar el término II, utilizamos *fracciones parciales*:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+4s+13} &= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+13} \\ &= \frac{s^2(A+B) + s(4A+C-B) + (13A-C)}{(s-1)(s^2+4s+13)}\end{aligned}$$

igualando coeficientes, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}A+B &= 0 \\ 4A+C-B &= 0 \\ 13A-C &= 1\end{aligned}$$

cuya solución es $A = \frac{1}{18}$, $B = \frac{-1}{18}$, $C = \frac{-5}{18}$.

De lo anterior, y usando nuevamente que $s^2+4s+13 = (s+2)^2+3^3$, además del *primer teorema de traslación*:

$$\begin{aligned}II &= \frac{1}{18}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{s+5}{(s+2)^2+3^3}\right] \\ &= \frac{1}{18}\left[\frac{1}{s-1} - \left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^3} + \frac{3}{(s+2)^2+3^3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{18}\left[\mathcal{L}\{e^t\}(s) - \left(\mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)\right)\right]\end{aligned}$$

Recapitulando, tenemos

$$\begin{aligned}Y(s) &= \mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s) \\ &\quad + \frac{1}{18}\left[\mathcal{L}\{e^t\}(s) - \left(\mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)\right)\right] \\ &= \frac{1}{18}\left[\mathcal{L}\{e^t\}(s) + 17\mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + 11\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)\right]\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando Antitransformada concluimos

$$y(t) = \frac{1}{18}\left[e^t + 17e^{-2t}cos(3t) + 11e^{-2t}sen(3t)\right]$$