MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-02
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 08: Transformada de Laplace
15/Octubre

1. Transformadas útiles.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\}(s) &= \frac{1}{s} & \mathcal{L}\{sen(kt)\}(s) &= \frac{k}{s^2+k^2}\\
\mathcal{L}\{t^n\}(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s>0,\ n\geq 1 & \mathcal{L}\{cos(kt)\}(s) &= \frac{s}{s^2+k^2}\\
\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \frac{1}{s-a} & \mathcal{L}\{senh(kt)\}(s) &= \frac{k}{s^2-k^2}\\
\mathcal{L}\{\delta_a(t)\}(s) &= e^{-as} & \mathcal{L}\{cosh(kt)\}(s) &= \frac{s}{s^2-k^2}
\end{aligned}$$

2. Teoremas importantes.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas a trozos y de orden exponencial, es decir, que admiten Transformadas de Laplace denotadas por $F(s), G(s)$ respectivamente.

Teorema 1 (Primer teorema de traslación)

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$$

Teorema 2 (Segundo teorema de traslación)

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$$

con $H(t)$ función de Heaviside.

Teorema 3 (Derivadas de una transformada) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s > C+n$, se tiene que*

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

Teorema 4 (Derivadas de una transformada) *si f satisface que $f,\ f',\dots,\ f^n$ son continuas a trozos y de orden exponencial (con las mismas constantes), entonces se tiene*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0),\ s>C$$

Teorema 5

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

donde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

P1. La transformada de Laplace de la función $t^{-1/2}cosh(t)$ tiene la forma

$$I = h(s)\sqrt{s+\sqrt{s^2-1}}$$

Encuentre $h(s)$.

P2. Considere la función f, definida en $[0,2)$

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

y para $t \geq 2:\ f(t+2) = f(t)$. Calcule su transformada de Laplace.

P3. Resuelva la siguiente EDO:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 13y &= e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

P4. Resuelva la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1, \\ 2-t & 1 \leq t < 2, \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$$

sujeta a $y(0) = 1$.

P5. Considere la ecuación de Bessel de orden p:

$$t^2y''(t) + ty'(t) + (t^2 - p^2)y(t) = 0$$

(i) si $y(t)$ es una solución, muestre que $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ satisface

$$(1+s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + (1-p^2)Y(s) = 0$$

(ii) para $p = 0$, resuelva la ecuación anterior expresándola en la forma

$$\frac{d}{ds}[A(s)Y'(s) + B(s)Y(s)] = 0$$

P6. Pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\}(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$$