MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-02
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 03
31/agosto

P1. **Reducción:** se tiene una partícula en un medio viscosa que se deja caer desde una altura H (inicialmente se encuentra en reposo). Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene que la EDO que rige el movimiento de dicha partícula es

$$-kv - mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

donde $F = -kv$ es la fuerza de roce viscoso, y v es la velocidad de la partícula. Encuentre la velocidad y posición de la partícula en el tiempo.

P2. **Ecuación de Ricatti:** sean y_1, y_2 dos soluciones distintas de

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

con $p(x),\ q(x),\ r(x)$ funciones continuas dadas.

Demuestre que toda otra solución y satisface

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C\exp\left(\int p(x)(y_1 - y_2)dx\right) \quad C \in \mathbb{R}$$

P3. (a) **Desigualdad de Gronwall:** sean $C \geq 0$, f y g dos funciones continuas y positivas en $[0, T]$. Pruebe que si

$$f(x) \leq C + \int_0^x g(s)f(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

entonces

$$f(x) \leq C\exp\left(\int_0^x g(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Indicación: considere $h(x) = C + \int_0^x g(s)f(s)ds$. Encuentre una desigualdad diferencial ordinaria para h y resuélvala con un factor integrante adecuado.

(b) Sean y y z soluciones de los problemas de Cauchy en $[0, T]$

$$\begin{array}{rclcrcl} y' &=& f(x, y), & & y(0) &=& y_0 \\ z' &=& f(x, z), & & z(0) &=& z_0 \end{array}$$

Suponga que f es continua en sus dos variables y globalmente Lipschitz con respecto a su segunda variable. Pruebe que las soluciones existen y son únicas en $[0, T]$, y que existe $L > 0$ tal que

$$\sup_{x \in [0,T]} |y(x) - z(x)| \leq |y_0 - z_0|\exp(LT)$$