MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-02
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 14
02/diciembre

P1. Resuelva

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = e^{-x} + xcos(x)$$

Sol.:

- **Solución homogénea**. las raíces del polinomio característico son

$$\begin{aligned} 0 &= m^4 + 3m^2 - 4 \\ 0 &= (m^2+4)(m^2-1) \\ 0 &= (m-2i)(m+2i)(m-1)(m+1) \end{aligned}$$

Con esto, el conjunto fundamental es $\{cos(2x),\ sen(2x),\ e^x,\ e^{-x}\}$.

- **Solución particular**. Usamos el *principio de superposición*:
Buscamos resolver $y^{(4)} + 3y'' - 4y = e^{-x}$, proponiendo la solución $y_1(x) = Axe^{-x}$, cuyas derivadas son:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= A(1-x)e^{-x} \\ y_1''(x) &= A(x-2)e^{-x} \\ y_1'''(x) &= A(3-x)e^{-x} \\ y_1^{(4)}(x) &= A(x-4)e^{-x} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación se determina A:

$$\begin{aligned} [A(x-4)e^{-x}] + 3[A(x-2)e^{-x}] - 4[Axe^{-x}] &= e^{-x} \\ Ae^{-x}[(x-4) + 3(x-2) - 4x] &= e^{-x} \\ A &= -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Con esto, $y_1(x) = -\dfrac{1}{10}xe^{-x}$.

Se resuelve $y^{(4)} + 3y'' - 4y = xe^{ix}$, proponiendo $y_2(x) = Re[z(x)]$, con $z(x) = A_1 + A_2xe^{ix}$.
De manera análoga a lo anterior (derivando $z(x)$), se determinan $A_1,\ A_2$ y en consecuencia:

$$y_2(x) = Re\left[\left(\frac{-(i+1)}{6} + \frac{i-1}{2}x\right)e^{ix}\right]$$

finalmente, $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

P2. Encuentre la solución de la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t & 0 \le t < 1, \\ 2-t & 1 \le t < 2, \\ 0 & 2 \le t \end{cases}$$

sujeta a $y(0) = 1$.

Sol.: en primer lugar, notamos que la ecuación puede reescribirse como:

$$y'(t) + 2y(t) + (y * 1)(t) = t[H_0(t) - H_1(t)] + (2-t)[H_1(t) - H_2(t)]$$

Denotando por $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, buscamos las transformadas correspondientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\{(y*1)(t)\}(s) &= Y(s)\frac{1}{s} \\ \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{tH_0(t) + 2(t-1)H_1(t) + (t-2)H_2(t)\}(s) \\ &= \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Aplicando Transformada de Laplace a la ecuación, y reemplazando lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} [sY(s) - 1] + 2Y(s) + Y(s)\frac{1}{s} &= \frac{1}{s^2}[1 - 2e^{-s} + e^{-2s}] \\ Y(s)\left[s + 2 + \frac{1}{s}\right] &= 1 + \frac{1}{s^2}[1 - 2e^{-s} + e^{-2s}] \\ Y(s) &= [s^2 + 1 - 2e^{-s} + e^{-2s}]\frac{1}{s(s^2+2s+1)} \\ Y(s) &= \frac{s^2+1}{s(s^2+2s+1)} + \frac{[e^{-2s} - 2e^{-s}]}{s(s+1)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

- Podemos descomponer el primer término en fracciones parciales, o bien notar que

$$\frac{s^2+1}{s(s^2+2s+1)} = \frac{(s^2+2s+1) - 2s}{s(s^2+2s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2}$$

Aplicando Antitransformada a lo anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s^2+2s+1)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}(t) \\ &= 1 - 2e^{-t}t \end{aligned}$$

- En el caso del segundo término, notamos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)^2}\right\}(t) = (1 * e^{-x}x)(t)$, con esto (usando el *segundo teorema de traslación*) su Antitransformada está dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s} - 2e^{-s}}{s(s+1)^2}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right\}(t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right\}(t) \\
&= H(t-2)(1 * e^{-x}x)(t-2) - 2H(t-1)(1 * e^{-x}x)(t-1)
\end{aligned}$$

de (1), concluimos

$$y(t) = 1 - 2e^{-t}t + H(t-2)(1 * e^{-x}x)(t-2) - 2H(t-1)(1 * e^{-x}x)(t-1)$$

P3. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$ a coeficientes constantes, y supongamos que $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

(i) Demostrar que $\dfrac{d}{ds}([Ay(s)]^T y(s)) = 2[Ay(s)]^T y'(s)$

(ii) Si y satisface la ecuación diferencial $y'' + Ay = 0$, demuestre que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|y'(s)\|^2 + [Ay(s)]^T y(s) = C$$

<u>Sol.:</u>

(i) Ya que A es simétrica: $[Ay(s)]^T y(s) = y^T(s)Ay(s) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} y_i(s)a_{ij}y_j(s)$

Derivando esta expresión, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}([Ay(s)]^T y(s)) &= \frac{d}{ds}\left[\sum_{i,j=1}^{n} y_i(s)a_{ij}y_j(s)\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} y_i'(s)a_{ij}y_j(s) + \sum_{i,j=1}^{n} y_i(s)a_{ij}y_j'(s) \\
&= \sum_{j,i=1}^{n} y_j(s)a_{ji}y_i'(s) + y^T(s)Ay'(s) \\
&= y^T(s)A^T y'(s) + y^T(s)A^T y'(s) \\
&= 2[Ay(s)]y'(s)
\end{aligned}$$

Notar que de la segunda a la tercera línea, se intercambiaron las sumatorias y se usó que $a_{ij} = a_{ji}$.

(ii) Basta mostrar que $\dfrac{d}{ds}(\|y'(s)\|^2 + [Ay(s)]^T y(s)) = 0$. En efecto,

$$\frac{d}{ds}\|y'(s)\|^2 = \frac{d}{ds}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i'(s))^2\right] = 2\sum_{i=1}^{n} y_i'(s)y_i''(s) = 2(y''(s))^T y'(s)$$

Usando lo anterior y la parte (i):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\|y'(s)\|^2 + [Ay(s)]^T y(s)) &= \frac{d}{ds}\|y'(s)\|^2 + \frac{d}{ds}([Ay(s)]^T y(s)) \\
&= 2(y''(s))^T y'(s) + 2[Ay(s)]^T y'(s) \\
&= 2[y''(s) + Ay(s)]^T y'(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que $y(s)$ es solución de $y''(s) + Ay(s) = 0$.

P4. Sean A, B matrices de $n \times n$. Demuestre que $AB = BA$ ssi $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Definamos $\psi(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$. Para demostrar lo pedido, veamos que $\psi(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Notemos que $\psi'(t) = (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB}$, y dado que $AB = BA$, se tiene $e^{tA}B = Be^{tA}$. Luego

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} \\
&= (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - Be^{tA}e^{tB} \\
&= (A+B)(e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}) \\
&= (A+B)\psi(t)
\end{aligned}$$

Y además, $\psi(0) = I - II = 0$; es decir $\psi(t)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \psi'(t) = (A+B)\psi(t) \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

Pero este sistema tiene por solución a la función nula. Luego, por el *teorema de existencia y unididad* concluimos que

$$\psi(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

($\Leftarrow$) Tenemos que $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$, derivando dos veces esta expresión:

$$(A+B)(A+B)e^{t(A+B)} = A^2e^{tA}e^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + e^{tA}B^2e^{tB}$$

Evaluando en $t = 0$:

$$\begin{aligned}
(A+B)(A+B) &= A^2 + AB + AB + B^2 \\
A^2 + AB + BA + B^2 &= A^2 + AB + AB + B^2 \\
BA &= AB
\end{aligned}$$

P5.

$$\begin{cases} x' &=& x(10 - x - \frac{1}{2}y) \\ y' &=& y(16 - y - x) \end{cases}$$

(i) Calcule y grafique las nulclinas en x e y.

(ii) Encuentre los puntos críticos del sistema. Determine las linealizaciones.

(iii) Calcule el Jacobiano del sistema y los valores propios en torno a ellos. Es degenerado el sistema?

(iv) Determine el tipo y estabilidad de los puntos críticos.

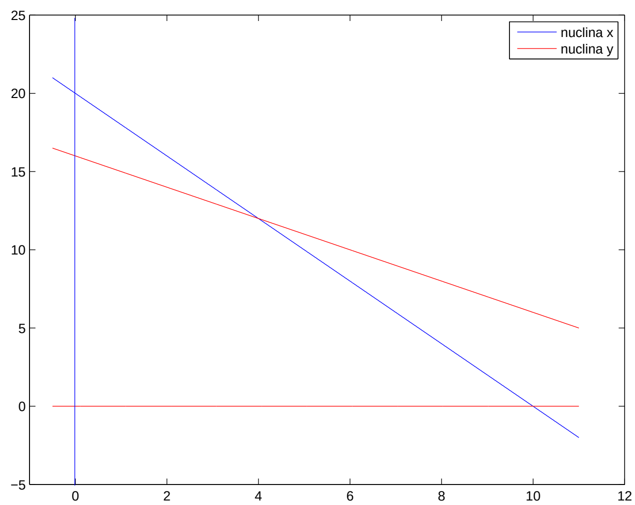
(v) Elabore los diagramas de fase cerca de los puntos críticos, indicando el sentido del tiempo y la dirección de las rectas tangentes y/o asíntotas.

(vi) Elabore un diagrama de fases global para $x \geq 0,\ y \geq 0$

Sol.:

(i) Sean $F(x,y) = x(10 - x - \dfrac{1}{2}y),\ G(x,y) = y(16 - y - x)$. Las nulclinas en x e y son las curvas definidas por $F(x,y) = 0$ e $G(x,y) = 0$, respectivamente.

Gráficamente, se tiene



(ii) Los puntos críticos se encuentran al resolver el sistema

$$\begin{cases} x(10 - x - \frac{1}{2}y) &=& 0 \\ y(16 - y - x) &=& 0 \end{cases}$$

Se presentan los siguientes casos:

- Si $x = 0$:

$$y(16 - y) = 0 \Rightarrow y = 0 \ \vee \ y = 16.$$

- Si $y = 0$:
$$x(10 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \vee \ x = 10.$$
- Si $x, y \neq 0$:
$$\begin{cases} 10 - x - \frac{y}{2} &= 0 \\ 16 - y - x &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4, \ y = 12.$$

Por tanto, los puntos críticos son:

$$\mathcal{C} = \{(0,0), (0,16), (10,0), (4,12)\}.$$

Denotamos por $H(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$. Los sistemas linealizados están dados por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J_H(\overline{x}, \overline{y}) \begin{pmatrix} x - \overline{x} \\ y - \overline{y} \end{pmatrix}$$

con $J_H(x, y)$ Jacobiano del sistema, y $(\overline{x}, \overline{y})$ punto crítico.

(iii) El Jacobiano del sistema está dado por

$$J_H(x, y) = \begin{bmatrix} 10 - 2x - \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} \\ -y & 16 - 2y - x \end{bmatrix}$$

en torno a los puntos críticos:

$$J_H(0,0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, \ J_H(0,16) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -16 & -16 \end{bmatrix}$$

$$J_H(10,0) = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \ J_H(4,12) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -12 & -12 \end{bmatrix}$$

Para ver que el sistema es no degenerado, se calcula el determinante de J_H evaluado a cada punto crítico:

- $\det(J_H(0,0)) = 160 \neq 0$.
- $\det(J_H(0,16)) = -32 \neq 0$.
- $\det(J_H(10,0)) = -60 \neq 0$.
- $\det(J_H(4,12)) = 24 \neq 0$.

Esto implica que el sistema es no degenerado.

(iv) Calculamos los valores propios de cada Jacobiano:

- $J_H(0,0)$:
  $\lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 16 \Rightarrow$ nodo inestable (valores propios de igual signo, positivos)

- $J_H(0,16)$:
  $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -16 \Rightarrow$ punto silla, inestable (valores propios de signo distinto)

- $J_H(10,0)$:
  $\lambda_1 = -10,\ \lambda_2 = 6 \Rightarrow$ punto silla

- $J_H(4,12)$:
  El polinomio característico en este caso es $p(\lambda) = \lambda^2 + 16\lambda + 24$, cuyas raíces son $\lambda_1 = -8 + 2\sqrt{10},\ \lambda_1 = -8 - 2\sqrt{10} \Rightarrow$ nodo asintóticamente estable (valores propios negativos)