MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2009-03
Profesor: Julio López.
Auxiliar: Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 07-08
11-14/enero/2010

1. Coeficientes Indeterminados

- Sirve para encontrar una solución particular.
- Es aplicable sólo a ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.
- Es usado cuando

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = q(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha_i x}(P_i(x)cos(\beta_i x) + Q_i(x)sen(\beta_i x)) \quad (1)$$

donde α_i, $\beta_i \in \mathbb{R}$; $P_i(x)$, $Q_i(x)$ son polinomios.

1.1. Aplicación

1. Encontrar la base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de la solución homogénea $y_h(x)$.
2. Determinar el anulador de $q(x)$
3. Aplicar anulador y resolver una nueva ecuación homogénea.
4. La solución de esta última ecuación tendrá por base a $\{y_1, \ldots, y_m\}$, $m > n$. Luego, $\{y_{n+1}, \ldots, y_m\}$ será la base de la solución particular $y_p(x)$ de (1).
5. $y_p(x) = \sum_{k=n+1}^{m} d_k y_k(x)$ se reemplaza en (1), para obtener los coeficientes indeterminados $\{d_{n+1}, \ldots, d_m\}$.

1.2. Anuladores

$\forall n \geq 1$, $b \neq 0$:

Familia de funciones	Polinomio anulador
$\{e^{ax}, xe^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\}$	$(D-a)^n$
$\{e^{ax}cos(bt), xe^{ax}cos(bt), \ldots, x^{n-1}e^{ax}cos(bt)\}$	$[D^2 - 2aD + (a^2+b^2)]^n$
$\{e^{ax}sen(bt), xe^{ax}sen(bt), \ldots, x^{n-1}e^{ax}sen(bt)\}$	$[D^2 - 2aD + (a^2+b^2)]^n$

Ej1. Encuentre la solución de $y^{(5)} + 8a^3y'' = a + e^{ax}cos(ax)$.

1.1 El polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(m) &= m^5 + 8a^3m^2 = m^2(m^3 + (2a)^3) \\ &= m^2(m + 2a)(m^2 - 2am + 4a^2) \end{aligned}$$

de raíces $m_1 = m_2 = 0,\ m_3 = -2a,\ m_{4,5} = a \pm a\sqrt{3}i$.

Así, la base de la **solución homogénea** es $\{1, x, e^{-2ax}, e^{ax}cos(a\sqrt{3}x), e^{ax}sen(a\sqrt{3}x)\}$, es decir

$$y_h(x) = d_1 + d_2x + d_3e^{-2ax} + e^{ax}(d_4cos(a\sqrt{3}x) + d_5sen(a\sqrt{3}x))$$

1.2 **El polinomio anulador P(D)** de $a + e^{ax}cos(ax)$ es $P(D) = D(D^2 - 2aD + 2a^2)$, ya que el anulador de a es D, y de $e^{ax}cos(ax)$ es $D^2 - 2aD + 2a^2$.

Aplicando P(D) a la ecuación:

$$\begin{aligned} y^{(5)} + 8a^3y'' &= a + e^{ax}cos(ax) \\ D^2(D + 2a)(D^2 - 2aD + 4a^2)y &= a + e^{ax}cos(ax) \quad \backslash\, D(D^2 - 2aD + 2a^2) \\ D(D^2 - 2aD + 2a^2)D^2(D + 2a)(D^2 - 2aD + 4a^2)y &= 0 \end{aligned}$$

La solución homogénea de esta nueva ecuación tiene por base a
$\{1, x, x^2, e^{-2ax}, e^{ax}cos(a\sqrt{3}x), e^{ax}sen(a\sqrt{3}x), e^{ax}cos(ax), e^{ax}sen(ax)\}$

Luego la **solución particular** $y_p(x)$ tiene por base a $\{x^2, e^{ax}cos(ax), e^{ax}sen(ax)\}$. Es decir,

$$y_p(x) = e^{at}(d_6cos(ax) + d_7sen(ax)) + d_8x^2$$

Reemplazando $y_p(x)$ en la ecuación, se determinan los coeficientes $\{d_6, d_7, d_8\}$.

Antes, calculemos y_p'' y $y_p^{(5)}$ [1]:

$$\begin{aligned} y_p'' &= 2d_8 + a^2e^{ax}[(d_6 + d_7)cos(ax) + (d_7 - d_6)sen(ax)] \\ y_p^{(5)} &= a^5e^{ax}[-4(d_6 + d_7)cos(ax) + 4(d_6 - d_7)sen(ax)] \end{aligned}$$

[1] para calcular derivadas de un producto, se sugiere usar la fórmula de Leibnitz: $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}$

Reemplazando, y luego de ordenar:

$$[-4a^5(d_6+d_7)+16a^5d_7]e^{ax}cos(ax)+[a^5(d_6-d_7)-16a^5d_6]e^{ax}sen(ax)+16a^3d_8=e^{ax}cos(ax)+a$$

se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -4a^5(d_6+d_7)+16a^5d_7 &= 1 \\ a^5(d_6-d_7)-16a^5d_6 &= 0 \\ 16a^3d_8 &= a \end{aligned}$$

de solución $d_6=-\dfrac{1}{40a^5}$, $d_7=\dfrac{3}{40a^5}$, $d_8=\dfrac{1}{16a^2}$

Finalmente,

$$y(x)=d_1+d_2x+d_3e^{-2ax}+e^{ax}[d_4cos(a\sqrt{3}x)+d_5sen(a\sqrt{3}x)]+e^{at}(-\frac{1}{40a^5}cos(ax)+\frac{3}{40a^5}sen(ax))+\frac{1}{16a^2}x^2$$

P1. Resuelva mediante coeficientes indeterminados:

1. $z'''-2z''-5z'+6z=30e^t$
2. $y^{(4)}-5y''+4y=acosh(bx)-k$
3. $y'''+y''=1+2t$
4. $y''+10y'+25=14e^{-5x}$
5. $y''-2y'+5y=25x^2+12$
6. $y^{(4)}-y'''=x+e^x$
7. $2y'''-3y''-3y'+2y=(e^x+e^{-x})^2$
8. $y'''-3y''+4y=te^{2t}-sen(t)$
9. $y^{(12)}-y=e^t+1$

2. Variación de parámetros

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

1. Resolver la ecuación homogénea. Encontrar una base $\{y_1(t), y_2(t)\}$ para $y_h(t)$.
2. Se propone la solución particular $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$.
3. Para determinar $u_1(t)$, $u_2(t)$, se reemplaza la solución particular [2], y se tiene la condición :

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1,y_2)(t)} \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

De lo anterior resulta:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt, \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt$$

3. Ecuación de Euler-Cauchy

$$a_n t^n y^{(n)}(t) + \ldots + a_2 t^2 y''(t) + a_1 t y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Consideremos el cambio de variable $u = ln(t)$, y la nueva variable $\overline{y} = y(u)$. Veamos sus primeras derivadas [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \overline{y}'\frac{1}{t} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{t^2}(\overline{y}'' - \overline{y}') \\ \frac{d^3y}{dt^3} &= \frac{1}{t^3}(\overline{y}''' - 3\overline{y}'' + 2\overline{y}') \end{aligned}$$

Al aplicar el cambio de variable en la ecuación, resulta

$$b_n\overline{y}^{(n)}(u) + \ldots + b_2\overline{y}''(u) + b_1\overline{y}'(u) + b_0\overline{y}(u) = f(u)$$

[2] ya que $y_1(t), y_2(t)$ son parte de la base de la solución homogénea:

$$P(t)[u_1'y_1 + u_2'y_2] + 2u_1'y_1' + 2u_2'y_2' + u_1''y_1 + u_2''y_2 = f(t)$$

$$P(t)[u_1'y_1 + u_2'y_2] + u_1'y_1' + u_2'y_2' + \frac{d}{dt}[u_1'y_1 + u_2'y_2] = f(t)$$

dado que hay una sola ecuación para $u_1(t)$, $u_2(t)$, suponemos $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ y se concluye la condición.

[3] Queda propuesto el cálculo.

Ej.2 Resolver $y''' + \frac{1}{4t^2}y' = t^{-1/2} \quad t > 0$

2.1 encontremos la solución homogénea:
para usar variación de parámetros, reduzcamos la ecuación a otra de orden 2, mediante el cambio de variable $w(t) = y'(t)$:

$$w'' + \frac{1}{4t^2}w = t^{-1/2}$$

$$4t^2w'' + w = t^{-1/2} \quad (1)$$

Notemos que la última ecuación es del tipo Euler-Cauchy. Al aplicar el cambio de variable $u = ln(t)$, y considerar la nueva variable $\overline{w} = w(u)$ y ver la ecuación homogénea:

$$4(\overline{w}'' - \overline{w}') + \overline{w} = 0$$

El polinomio característico de esta ecuación es $p(m) = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2$.
Luego

$$\overline{w}_h = c_1e^{u/2} + c_2e^{u/2}u$$

y la solución homogénea de (1) está dada por:

$$w_h(t) = c_1t^{1/2} + c_2t^{1/2}ln(t)$$

2.2 Solución particular de (1):
Sea $w_1(t) = t^{1/2}$, $w_2(t) = t^{1/2}ln(t)$. Se tiene que $W(w_1, w_2)(t) = 1$.

A continuación, se propone $w_p(t) = w_1(t)u_1(t) + w_2(t)u_2(t)$. Determinemos $u_1(t)$, $u_2(t)$:

$$u_1(t) = -\int \frac{w_2(t)f(t)}{W(w_1, w_2)(t)}dt = -\int ln(t)dt = -t(ln(t) - 1)$$
$$u_2(t) = \int \frac{w_1(t)f(t)}{W(w_1, w_2)(t)}dt = \int dt = t$$

Finalmente,

$$w_p(t) = -t^{3/2}(ln(t) - 1) + t^{3/2}$$

2.3.

$$w(t) = [c_1t^{1/2} + c_2t^{1/2}ln(t)] + [t^{3/2} - t^{3/2}(ln(t) - 1)]$$

Integrando, se obtiene el valor de $y(t)$.

P2. Resuelva mediante variación de parámetros:

1. $y'' + 25y = sen^2(t)$
2. $y'' + 4y = tg(t)$
3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
4. $y'' - 2y' - 3y = 64e^{-x}$
5. $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$