MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-02
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 06
30/Septiembre

P1. Sea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1)$, con p, $q : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

(a) Demuestre que $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$, con $y_1(t), y_2(t)$ soluciones de (1) satisface

$$W(t) = W(t_0) \exp\Big(- \int_{t_0}^{t} p(\xi) d\xi \Big)$$

(b) Encuentre una expresión para $\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)'$ en términos de $W(t), y_1(t)$. A partir de esto y de (a), determine $y_2(t)$.

(c) Considere la ecuación (1), para $t \in (0, l)$, con $y_1(0) = 0$, $y_1(l) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2(l) = 0$. Pruebe que el valor medio de $p(t)$:

$$M = \frac{1}{l} \int_0^l p(s) ds$$

puede ser obtenido mediante la fórmula $M = \ln \Big[- \frac{y_1'(0)}{y_2'(l)} \Big]^{1/l}$

P2. Sea D el operador derivada. Si f, g son funciones $k-$veces diferenciables, se tiene la fórmula de Leibniz:

$$D^k[fg] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j[f] D^{k-j}[g]$$

(a) Si g es $k-$veces diferenciable y r una constante, pruebe que $D^k[e^{rx}g] = e^{rx}(D + r)^k[g]$.

(b) Sea L un operador lineal de orden k, tal que su polinomio característico tiene la forma $p(\lambda) = (\lambda - a)^k$. Muestre que cada solución ϕ de la ecuación $L[y] = 0$ es de la forma

$$\phi(x) = e^{ax} P(x)$$

con $P(x)$ polinomio de grado $m \leq k - 1$.

P3. Resuelva $t^3 y''' + t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^3 sen(ln(t))$