TAREA MA2601

Profesor: Felipe Olmos
Auxiliares: Avelio Sepúlveda, Nikolás Tapia
Fecha: 19 Noviembre
Entrega: 3 Diciembre 12:00, Secretaría Docente

Problema 1. Considere el problema de condición inicial

$$(\mathcal{P})\begin{cases} y'' + 8y' + 25y = 2\cos(t) \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Encuentre la solución y demuestre que existen constantes A y φ tales que

$$\lim_{t\to\infty} ((y(t) - A\cos(t-\varphi)) = 0$$

Problema 2. Suponga que la solución al problema

$$(\mathcal{P})\begin{cases} y''' - y = 0 \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_0' \quad y''(0) = y_0'' \end{cases}$$

satisface

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Demuestre que existen constantes a, b, c, d no todas nulas tales que:

$$ay_0 + by_0' + cy_0'' = d$$

Problema 3. Encuentre la solución al problema

$$(\mathcal{P})\begin{cases} y'' - y = A\delta(t-c) \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_0' \end{cases}$$

donde δ es la *delta de Dirac*, $c > 0$ y A, y_0 e $y_0' \in \mathbb{R}$.
Si además $a = 1$ y $b = 1$ determine $A \in \mathbb{R}$ y $c \in [0, \pi]$ tales que $y(t) = 0$ para $t \geq c$.

Problema 4. Resuelva el siguiente problema integro-diferencial usando transformada de Laplace.

$$(\mathcal{P})\begin{cases} y'(t) = \cos(t) + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 5. Sea $V(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Demuestre que las soluciones del sistema satisfacen $V(x(t), y(t)) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ constante.

Problema 6. El siguiente sistema no lineal modela el crecimiento de bacterias en un quimioestato. x representa la población de bacterias en el tiempo e y los nutrientes disponibles en el quimioestato:

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha \frac{y}{y+1} x - x \\
y' &= -\frac{y}{y+1} x - y + \beta
\end{aligned}
$$

Las constantes $\alpha > 1$ y $\beta > 0$ dependen de los nutrientes, las bacterias y el quimioestato usado. Encuentre condiciones adicionales sobre α y β para que el sistema tenga un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ con $\bar{x} > 0$ e $\bar{y} > 0$. Demuestre además que bajo estas condiciones el sistema el punto crítico es estable.