Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Control 3, MA2601 (1-2) EDO (03/10/10)

Prof. Felipe Olmos, Julio López, **Aux.** Avelio Sepúlveda, Francisco Bravo, Nikolás Tapia, Sebastián Reyes Riffo.

P1. (a) Aplicando transformada de Laplace a cada termino del lado derecho de la expresión se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{c}{c^2+(b-a)^2}[e^{at}-e^{bt}\cos(ct)]\right)(s) &= \frac{c}{c^2+(b-a)^2}\mathcal{L}(e^{at}-e^{bt}\cos(ct))(s)\\
&= \frac{c}{c^2+(b-a)^2}(\mathcal{L}(e^{at})(s)-\mathcal{L}(e^{bt}\cos(ct))(s))\\
&= \frac{c}{c^2+(b-a)^2}\left(\frac{1}{s-a}-\mathcal{L}(\cos(ct))(s-b)\right)\\
&= \frac{c}{c^2+(b-a)^2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{s-b}{(s-b)^2+c^2}\right)\\
&= \frac{c(b^2+c^2-bs+as-ab)}{(c^2+(b-a)^2)(s-a)((s-b)^2+c^2)}
\end{aligned}$$

(0.6 pto.)

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{b-a}{c^2+(b-a)^2}e^{bt}\text{sen}(ct)\right)(s) &= \frac{b-a}{c^2+(b-a)^2}\mathcal{L}(e^{bt}\text{sen}(ct))(s)\\
&= \frac{b-a}{c^2+(b-a)^2}\mathcal{L}(\text{sen}(ct))(s-b)\\
&= \frac{b-a}{c^2+(b-a)^2}\frac{c}{(s-b)^2+c^2}.
\end{aligned}$$

(0.6 pto.)

Sumando ambas expresiones nos resulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{c}{c^2+(b-a)^2}[e^{at}-e^{bt}\cos(ct)]+\frac{b-a}{c^2+(b-a)^2}e^{bt}\text{sen}(ct)\right)(s) &= \frac{c(c^2+(a-b)^2)}{(c^2+(b-a)^2)(s-a)((s-b)^2+c^2)}\\
&= \frac{c}{(s-a)((s-b)^2+c^2)}\\
&= \frac{1}{s-a}\frac{c}{(s-b)^2+c^2}\\
&= \mathcal{L}(e^{at})(s)\mathcal{L}(e^{bt}\text{sen}(ct))(s)\\
&= \mathcal{L}(e^{at}*e^{bt}\text{sen}(ct))(s)
\end{aligned}$$

(0.6 pto.)

Aplicando el Teorema de Lerch, se deduce la igualdad:

$$e^{at}*e^{bt}\text{sen}(ct)=\frac{c}{c^2+(b-a)^2}[e^{at}-e^{bt}\cos(ct)]+\frac{b-a}{c^2+(b-a)^2}e^{bt}\text{sen}(ct).$$

(0.2 pto.)

(b) Haciendo uso de la función de Heaviside, escribimos la función f como:

$$f(t) = \begin{cases} -\mathrm{sen}(t) & , \quad 0 \leq t < \pi \\ -\pi\cos(t) & , \quad t \geq \pi. \end{cases} = -\mathrm{sen}(t) + (-\pi\cos(t) + \mathrm{sen}(t))H_\pi(t)$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = -\mathrm{sen}(t) + (\pi\cos(t-\pi) - \mathrm{sen}(t-\pi))H_\pi(t),$$

pues $\cos(t-\pi) = -\cos(t)$ y $\mathrm{sen}(t-\pi) = -\mathrm{sen}(t)$.

(0.2 pto.)

Aplicando Transformada de Laplace a esta función:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= -\mathcal{L}(\mathrm{sen}(t)) + \pi\mathcal{L}(\cos(t-\pi)H_\pi(t))(s) - \mathcal{L}(\mathrm{sen}(t-\pi)H_\pi(t))(s) \\ &= -\frac{1}{s^2+1} + \pi e^{-\pi s}\mathcal{L}(\cos(t))(s) - e^{-\pi s}\mathcal{L}(\mathrm{sen}(t))(s) \\ &= -\frac{1}{s^2+1} + \pi e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} - e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

(0.7 pto.)

Sea $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[ty''(t)](s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y''(t)](s) = -\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) = -\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - y'(0)) \\ &= -(2sY(s) + s^2Y'(s)). \\ \mathcal{L}[-2y'(t)](s) &= -2(sY(s) - y(0)) = -2sY(s). \\ \mathcal{L}[ty(t)](s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y(t)](s) = -Y'(s). \end{aligned}$$

Luego aplicando Transformada de Laplace a la ecuación diferencial y lo calculado anteriormente, se obtiene:

$$-(1+s^2)Y'(s) - 4sY(s) = -\frac{1}{s^2+1} + \pi e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} - e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

que es equivalente a:

$$Y'(s) + \frac{4s}{1+s^2}Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{\pi s e^{-\pi s}}{(s^2+1)^2} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)^2},$$

el cual es una ecuación de 1er orden.

(1 pto.)

Esta ecuación se puede escribir como:

$$\underbrace{(s^2+1)^2Y'(s) + 4s(s^2+1)Y(s)}_{((s^2+1)^2Y(s))'} = 1 - \pi s e^{-\pi s} + e^{-\pi s} = 1 + (1-\pi s)e^{-\pi s}.$$

Integrando obtenemos con respecto a s:

$$(s^2+1)^2Y(s) = s + se^{-\pi s} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

de donde

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{se^{-\pi s}}{(s^2+1)^2} + \frac{c}{(s^2+1)^2}.$$

(0.6 pto.)

Aplicando transformada inversa, nos da:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-\pi s}}{(s^2+1)^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{(s^2+1)^2}\right](t).$$

Pero

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[\cos(t)](s)\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) = \mathcal{L}[\cos(t) * \operatorname{sen}(t)](s)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right](t) = \cos(t) * \operatorname{sen}(t).$$

ó también

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right](t) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})\right](t) = -\frac{1}{2}(-t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t)) = \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t).$$

(0.4 pto.)

De forma análoga:

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s)\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) = \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t)](s)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right](t) = \operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t).$$

ó también

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{s}{(s^2+1)^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)\right](s)\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)dt\right](s)\right](t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \tau\operatorname{sen}(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(t) - t\cos(t)).
\end{aligned}$$

(0.4 pto.)

En forma similar:

$$e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)^2} = e^{-\pi s}\mathcal{L}[\cos(t) * \operatorname{sen}(t)](s)$$

entonces por la propiedad 7 (traslación)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)^2}](t) &= \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s}\mathcal{L}[\cos(t) * \operatorname{sen}(t)](s)](t) \\
&= H_\pi(t)\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[\cos(t) * \operatorname{sen}(t)](s)](t-\pi) \\
&= H_\pi(t)(\cos(\cdot) * \operatorname{sen}(\cdot))(t-\pi) \\
&= H_\pi(t)(\cos(t-\pi) * \operatorname{sen}(t-\pi)) \\
&= H_\pi(t)(\cos(t) * \operatorname{sen}(t)).
\end{aligned}$$

O también,

$$e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)^2} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)\right](s),$$

usando entonces la propiedad 7 (traslación) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)^2}](t) &= \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t)\right](s)](t)\\
&= \frac{1}{2}H_\pi(t)[t\,\mathrm{sen}(t)](t-\pi)\\
&= \frac{1}{2}H_\pi(t)(t-\pi)\,\mathrm{sen}(t-\pi)
\end{aligned}$$

(0.5 pto.)

Por tanto, usando cualquiera de las transformadas, la solución es:

$$y(t) = \cos(t) * \mathrm{sen}(t) + H_\pi(t)(\cos(t) * \mathrm{sen}(t)) + c\,\mathrm{sen}(t) * \mathrm{sen}(t), \quad c \in \mathbb{R}$$

y si usamos las otras, la solución es:

$$y(t) = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t) + \frac{1}{2}H_\pi(t)(t-\pi)\,\mathrm{sen}(t-\pi) + c\,\frac{1}{2}(\mathrm{sen}(t) - t\cos(t)), \quad c \in \mathbb{R}.$$

(0.2 pto.)

P2. (a) Para resolver este sistema debemos primero tratar de diagonalizar la matriz, calculamos entonces los valores propios:

$$\begin{aligned}
|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}\\
&= -(\lambda+1)^2(\lambda-6) + 16(\lambda-6)\\
&= (\lambda-6)(-\lambda^2-2\lambda-1+16)\\
&= -(\lambda-6)(\lambda^2+2\lambda-15)\\
&= -(\lambda-6)(\lambda+5)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios son $\lambda = 6$, $\lambda = -5$ y $\lambda = 3$. Procedemos a buscar los vectores propios, para el primer caso:

$$(A-6I)v = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 4 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Sumando las dos primeras ecuaciones obtenemos $-3v_1 - 3v_2 = 0$ o sea $v_1 = -v_2$. Usando esto en la primera ecuación concluimos que $7v_2 + 4v_2 + 2v_3 = 0$, luego $v_3 = -\frac{11}{2}v_2$. Tomando como parámetro libre $v_2 = 2$ obtenemos el vector propio $v = (-2\,,\,2\,,\,-11)^T$.

Continuamos con el valor propio -5

$$(A-6I)v = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

De lo que se deduce $v_3 = 0$ y $4v_1 + 4v_2 = 0$. Luego un vector propio es $(1\,,\,-1\,,\,0)^T$. Finalmete para $\lambda = 3$

$$(A - 6I)v = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto $v_3 = 0$ y $-4v_1 + 4v_2 = 0$. Un vector propio asociado es $(1\,,\,1\,,\,0)^T$. Con esto ya podemos escribir la solución general

$$x = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix} e^{6t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$$

(2.0 pto.)

Una alternativa a esto es escribir la matriz exponencial e^{At} con la diagonalización y darse parámetros para la condición inicial. Con esto la solución es

$$x = e^{At}x^0 = Ce^{Dt}\underbrace{C^{-1}x^0}_{\mathbf{K}}$$

donde el vector $\mathbf{K}$ tiene las constantes que dependen de la condición inicial x^0. Trabajando un poco la expresión se debería llegar a lo mismo que antes.

(b)(i)

El sistema de EDO's es equivalente a

$$x' = x + 8y$$
$$y' = x - y$$

Tomando transformada de Laplace a ambas ecuaciones obtenemos

$$sX - x(0) = sX - 1 = X + 8Y$$
$$sY - y(0) = sY - 1 = X - Y$$

(0.5 pto.)

Despejando Y de la segunda ecuación (**alternativa**: despejar X de la primera ecuación):

$$Y = \frac{X+1}{s+1}$$

Reemplazamos esto en la primera ecuación:

$$sX - 1 = X + 8\left(\frac{X+1}{s+1}\right)$$

Con lo cual

$$X\left(s - 1 - \frac{8}{s+1}\right) = \frac{8}{s+1} + 1$$
$$X\left(\frac{s^2-9}{s+1}\right) = \frac{8}{s+1}$$
$$\Rightarrow X = \frac{8}{s^2-9} + \frac{s+1}{s^2-9} = \frac{s+9}{s^2-9}$$

Ahora separando en fracciones parciales tenemos

$$X = \frac{s+9}{(s-3)(s+3)} = \frac{2}{s-3} + \frac{-1}{s+3}$$

Tomando transformada inversa obtenemos

$$x = 2e^{3t} - e^{-3t}$$

La expresión para Y la despejamos de la relación que obtuvimos antes

$$Y = \frac{X+1}{s+1} = \frac{\frac{s+9}{s^2-9}+1}{s+1} = \frac{s+\cancel{9}+s^2-\cancel{9}}{(s^2-9)(s+1)} = \frac{s(s+1)}{(s^2-9)(s+1)} = \frac{s}{s^2-9}$$

Separando Y en fracciones parciales

$$Y = \frac{s}{(s-3)(s+3)} = \frac{1/2}{s-3} + \frac{1/2}{s+3}$$

Tomando inversa finalmente se tiene que

$$y = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

(1.5 pto.)

(a)(ii) Debemos calcular una matriz fundamental de soluciones, la manera más sencilla es calcular la exponencial de A, para ello intentamos diagonalizar A, primero calculamos los valores propios:

$$|A-\lambda I| = \lambda^2 - \mathbf{tr}(A)\lambda + |A| = \lambda^2 - 0\cdot\lambda - 9 = \lambda^2 - 9$$

Los valores propios son entonces $\lambda = 3$ y $\lambda = -3$. Obtenemos algún vector propio por cada valor, primero con $\lambda = 3$:

$$(A-3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto los vectores del espacio propio de $\lambda = 3$ satisfacen $v_1 = 4v_2$ por lo que un vector propio es $(\,4\;1\,)^T$. Procedemos con $\lambda = -3$

$$(A-(-3)I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Luego los vectores propios de este valor satisfacen $v_1 = -2v_2$, por lo que tenemos que $(\,-2\;1\,)^T$ es un vector propio. Luego tenemos la descomposición:

$$A = CDC^{-1}$$

con

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & -2e^{-3t} \\ e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora para aplicamos la fórmula de variación de parámetros

$$x = e^{At}x^0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} b(s)\, ds$$

Lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & -2e^{-3t} \\ e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & -2e^{-3t} \\ e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-3s} & 0 \\ 0 & e^{3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} \\ se^{s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} - e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & -2e^{-3t} \\ e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-4s} + 2se^{-2s} \\ -e^{2s} + 4se^{4s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} - e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & -2e^{-3t} \\ e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t} - te^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2t} + te^{4t} - \frac{1}{4}e^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} - e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} - te^{t} - \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \\ \frac{1}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{t} + \frac{1}{8}e^{-3t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{3t} - \frac{5}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{t} - te^{t} \\ \frac{5}{8}e^{3t} + \frac{5}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{t} \end{pmatrix} \qquad =
\end{aligned}$$

Otra manera de obtener este resultado es ocupar la formulación con integral indefinida de variación de parámetros

$$x = e^{At}K + e^{At} \int e^{-As} b(s)\, ds$$

Donde K es un vector que se puede despejar con las condiciones iniciales. También se puede obtener una matriz fundamental a partir de la solución de la parte (i) y aplicar la fórmula de variación de parámetros con esa matriz.

También se puede resolver vía sustitución (i.e. despejando una variable de una ecuación, sustituyendo en la otra y obteniendo una ecuación de segundo orden para la otra variable, resolver y devolverse).

(2.0 pto.)

P3. (a) Puesto que $f' \in \mathcal{C}_\alpha$, su transformada de Laplace existe y esta dada por:

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0^+). \tag{0.1}$$

Tomando límite cuando $s \to \infty$ en la anterior expresión

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(f'(t))(s) = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0^+).$$

(0.6 pto.)

Usando el hecho que $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(f'(t))(s) = 0$, pues $f' \in \mathcal{C}_\alpha$, deducimos que:

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+).$$

(0.4 pto.)

Por otro lado, usando la definición de Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = \int_0^\infty e^{st} f'(t)dt.$$

Tomando límite cuando $s \to 0$ en al anterior expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} \mathcal{L}(f'(t))(s) &= \lim_{s\to 0} \int_0^\infty e^{st} f'(t)dt = \int_0^\infty (\lim_{s\to 0} e^{st}) f'(t)dt = \int_0^\infty f'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b f'(t)dt = \lim_{b\to\infty} f(t)|_0^b = \lim_{b\to\infty} f(b) - f(0^+).\end{aligned}$$

(0.6 pto.)

Finalmente, usando la ecuación (0.1) se deduce que:

$$\lim_{s\to 0}(sF(s) - f(0^+)) = \lim_{s\to 0} \mathcal{L}(f'(t))(s) = \lim_{b\to\infty} f(b) - f(0^+)$$

de donde

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{b\to\infty} f(b).$$

(0.4 pto.)

(b) Consideremos la función $H(t) = A\Phi(t) - \Phi(t)A$, la cual es derivable. Entonces,

$$H'(t) = A\Phi'(t) - \Phi'(t)A.$$

(0.4 pto.)

Puesto que $\Phi(t)$ es la matriz fundamental, entonces satisface: $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

(0.4 pto.)

Sustituyendo en la igualdad anterior nos resulta:

$$H'(t) = AA\Phi(t) - A\Phi(t)A = A(A\Phi(t) - \Phi(t)A) = AH(t).$$

(0.4 pto.)

Por otra parte, $H(0) = A\Phi(0) - \Phi(0)A = AI - IA = A - A = 0$.

(0.2 pto.)

En consecuencia, tenemos el PVI:

$$\begin{cases} H'(t) & = & AH(t) \\ H(0) & = & 0 \end{cases}$$

Se sigue del Teorema de existencia y unicidad que: $H(t) = 0$, para todo t. Por tanto, $A\Phi(t) - \Phi(t)A = 0$ implica $A\Phi(t) = \Phi(t)A$. Esto significa que las matrices A y $\Phi(t)$ conmutan.

(0.6 pto.)

(c) Una matriz fundamental del sistema primal satisface

$$M' = AM$$

Por otro lado una matriz fundamental del sistema dual satisface

$$N' = -A^T N$$

(1.0 pto.)

Usando la regla del producto para la derivación de matrices.

$$(N^T M)' = (N^T)' M + N^T M' = (N')^T + N^T M = (-A^T N)^T M + N^T (AM) = -N^T AM + N^T AM = 0$$

Luego $N^T M$ es constante pues su derivada es nula.

(0.5 pto.)

Cualquier solución del sistema primal se escribe

$$u = M(t)x_0$$

Donde x_0 es un vector constante (no necesariamente la condición inicial, pero si depende de ella). Lo mismo pasa para las soluciones del dual

$$v = N(t)y_0$$

Luego

$$v^T u = y_0^T N^T M x_0$$

y acabamos de demostrar que la matriz del medio es constante y los otros vectores son constantes, luego la multiplicaciones de las soluciones es constante.

(0.5 pto.)