Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 3, MA2601 (1-2) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Primavera 2010

Prof. Felipe Olmos, Julio López, **Aux.** Avelio Sepúlveda, Francisco Bravo, Nikolas Tapia, Sebastián Reyes Riffo.

P1.- (**a**) (2 ptos.) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$. Aplicando transformada de Laplace demuestre la igualdad:

$$e^{at} * e^{bt}\mathrm{sen}(ct) = \frac{c}{c^2+(b-a)^2}[e^{at} - e^{bt}\cos(ct)] + \frac{b-a}{c^2+(b-a)^2}e^{bt}\mathrm{sen}(ct).$$

(Sug. usar Teorema de Lerch).

(**b**) (4 ptos.) Usando transformada de Laplace, resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$ty'' - 2y' + ty = f(t), \quad y(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} -\mathrm{sen}(t) & , \quad 0 \leq t < \pi \\ -\pi\cos(t) & , \quad t \geq \pi. \end{cases}$$

P2.- (**a**) (2 ptos.) Encuentre la solución general del sistema de ecuaciones $x' = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(**b**) Considere la siguiente matriz y vectores,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(**i**) (2 ptos.) Usando la transformada de Laplace resuelva el problema:

$$x' = Ax, \quad x(0) = x^0.$$

(**ii**) (2 ptos.) Usando variación de parámetros, sustitución ó diagonalización, resuelva el problema:

$$x' = Ax + b, \quad x(0) = x^0.$$

P3.- (**a**) (2 ptos.) Sean $f, f' \in \mathcal{C}_\alpha$. Denotemos por $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ la transformada de Laplace de f. Demuestre que:

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$
$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+).$$

(**b**) (2 ptos.) Considere el sistema de ecuaciones $x'(t) = Ax(t)$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz constante. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema anterior con $\Phi(0) = I$ (la matriz identidad). Demuestre que las matrices A y $\Phi(t)$ conmutan. (Sug. considere $H(t) = A\Phi(t) - \Phi(t)A$).

(**c**) (2 ptos.) Considere el sistema de ecuaciones

$$x(t)' = A(t)x(t).$$

Se define el sistema de ecuaciones adjunto como

$$y(t)' = -A(t)^T x(t).$$

Si $M(t)$ es una matriz fundamental del primer problema y $N(t)$ del segundo, demuestre que $N(t)^\top M(t)$ es constante y que para cualquier par de soluciones u e w del problema original y su adjunto se tiene que $w^\top u$ es constante.

Propiedades:

Sea $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$.

1. $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$.
2. $\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)] = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.
3. $\mathcal{L}[\cos(at)] = \dfrac{s}{s^2+a^2}$.
4. $\mathcal{L}[t^k] = \dfrac{k!}{s^{k+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$.
6. $\mathcal{L}[H_a(t)] = \dfrac{1}{s}\,e^{-as}$.
7. $\mathcal{L}[H_a(t)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$.
8. $\mathcal{L}[\int_a^t f(u)du] = \dfrac{1}{s}F(s) - \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^a f(u)du$.
9. $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$.
10. $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)du$.
11. $\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$.
12. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-j-1)}(0^+)$.
13. Si $f(t) = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(at) - t\cos(at)$, entonces $\mathcal{L}(f(t))(s) = \dfrac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$, $a \neq 0$.