Pauta Control 2, MA2601 (1-2) EDO (01/09/10)

Prof. Felipe Olmos, Julio López, **Aux.** Avelio Sepúlveda, Francisco Bravo, Nikolás Tapia, Sebastián Reyes Riffo.

P1. (a) El polinomio característico asociado a esta EDO es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3.$$

Las raíces de $p(\lambda) = 0$ son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \ (\textit{multiplicidad}\ 2), \\ \lambda_2 &= 3 \ (\textit{multiplicidad}\ 1), \end{aligned}$$

así el sistema fundamental de soluciones es: $\{e^x, xe^x, e^{3x}\}$. Luego, la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(2 pto.)

(b)

(i) **1era forma:**

Sea $z(t) = y(t^2)$, entonces:

$$\begin{aligned} z'(t) &= 2ty'(t^2) = 2\sqrt{x}y'(x) \\ z''(t) &= 2y'(t^2) + 4t^2 y''(t^2) = 2y'(x) + 4xy''(x). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDO:

$$4xy'' + 2y' - 8\sqrt{x}y' - 5y = (3\sqrt{x} + 2)e^{-\sqrt{x}},$$

nos resulta:

$$z''(t) - 4z'(t) - 5z(t) = (3t + 2)e^{-t}.$$

2da forma:

Sea $x = t^2$, entonces $\frac{dx}{dt} = 2t$ y $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2t}$. Además

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{2t}\left[-\frac{1}{2t^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2t}\frac{d^2y}{dt^2}\right] = \frac{1}{4t^2}\left[-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right]. \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos:

$$4t^2\frac{1}{4t^2}\left[-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right] + (2 - 8t)\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} - 5y = (3t + 2)e^{-t}$$

o bién

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = (3t + 2)e^{-t}.$$

(ii) El polinomio característico asociado a esta EDO es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5),$$

cuyas raíces son: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

____ **(0.5 pto.)**

Así el sistema fundamental de soluciones es: $\{e^{-t}, e^{5t}\}$. Luego, la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$z_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

____ **(0.5 pto.)**

Ahora busquemos la solución particular.

1ra forma: (Coeficientes indeterminados)

Busquemos una solución particular de la forma

$$z_p(t) = te^{-t}(A + Bt),$$

entonces

$$\begin{aligned} z_p'(t) &= e^{-t}(A - At + 2Bt - Bt^2) \\ z_p''(t) &= e^{-t}(-2A + 2B + At - 4Bt + Bt^2). \end{aligned}$$

Reemplazando en la EDO, nos resulta:

$$e^{-t}(-12Bt - 6A + 2B) = (3t + 2)e^{-t},$$

de donde

$$(-12Bt - 6A + 2B) = (3t + 2),$$

lo que implica: $B = -\frac{1}{4}$ y $A = -\frac{5}{12}$, por lo que la solución particular es:

$$z_p(t) = -\frac{1}{12} te^{-t}(5 + 3t).$$

____ **(1.5 pto.)**

Así, la solución general, en términos de z, es:

$$z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} - \frac{1}{12} te^{-t}(5 + 3t),$$

____ **(0.3 pto.)**

y por tanto la solución general de nuestra ecuación inicial es:

$$y(x) = c_1 e^{-\sqrt{x}} + c_2 e^{5\sqrt{x}} - \frac{1}{12}\sqrt{x} e^{-\sqrt{x}}(5 + 3\sqrt{x}).$$

____ **(0.2 pto.)**

2da forma: (Variación de Parámetros)

Buscamos una solución particular de la forma: $z_p(t) = u_1(t)z_1(t) + u_2(t)z_2(t)$, donde $z_1(t) = e^{-t}$ y $z_2(t) = e^{5t}$. Entonces

$$W(z_1, z_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & 5e^{5t} \end{vmatrix} = 6e^{4t}.$$

Luego,

$$u_1'(t) = -\frac{z_2 q(t)}{W(t)} = -\frac{e^{5t}(3t+2)e^{-t}}{6e^{4t}} = -\frac{3t+2}{6},$$

$$u_2'(t) = \frac{z_1 q(t)}{W(t)} = \frac{e^{-t}(3t+2)e^{-t}}{6e^{4t}} = \frac{(3t+2)e^{-6t}}{6}.$$

Integrando, obtenemos:

$$u_1(t) = -\int \frac{3t+2}{6}dt = -\frac{1}{12}(3t^2+4t)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{6}\int (3t+2)e^{-6t}dt = -\frac{1}{12}e^{-6t}(t+\frac{5}{6}).$$

Por tanto,

$$z_p(t) = \frac{1}{12}e^{-t}(-(3t^2+4t) - (t+\frac{5}{6})) = -\frac{1}{12}e^{-t}(3t^2+5t+\frac{5}{6}).$$

____ **(1.5 pto.)**

Así, la solución general, en términos de z, es:

$$z(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{5t} - \frac{1}{12}e^{-t}(3t^2+5t+\frac{5}{6}),$$

____ **(0.3 pto.)**

y por tanto la solución general de nuestra ecuación inicial es:

$$y(x) = c_1e^{-\sqrt{x}} + c_2e^{5\sqrt{x}} - \frac{1}{12}e^{-\sqrt{x}}(3x+5\sqrt{x}+\frac{5}{6}).$$

____ **(0.2 pto.)**

P2. (a) Sea $\psi_1(x) = x\,\mathrm{sen}(2\log(x))$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_1'(x) &= \mathrm{sen}(2\log(x)) + 2\cos(2\log(x)) \\ \psi_1''(x) &= \frac{2}{x}(\cos(2\log(x)) - 2\mathrm{sen}(2\log(x)). \end{aligned}$$

Luego, reemplazando

$$x^2(\frac{2}{x}(\cos(2\log(x)) - 2\mathrm{sen}(2\log(x))) - x(\mathrm{sen}(2\log(x)) + 2\cos(2\log(x))) + 5x\,\mathrm{sen}(2\log(x)) =$$

$$2x(\cos(2\log(x)) - 2\mathrm{sen}(2\log(x))) - x(\mathrm{sen}(2\log(x)) + 2\cos(2\log(x))) + 5x\,\mathrm{sen}(2\log(x)) =$$

$$2x\cos(2\log(x)) - 4x\mathrm{sen}(2\log(x)) - x\mathrm{sen}(2\log(x)) - 2x\cos(2\log(x)) + 5x\,\mathrm{sen}(2\log(x)) = 0.$$

(b) Considere la ecuación diferencial $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$. Por la fórmula de Abel tenemos:

$$W(x) = C\exp(-\int p_1(x)dx).$$

En este caso, $p_1(x) = -\frac{1}{x}$, entonces

$$W(x) = C\exp(\int \frac{1}{x})dx = Cx.$$

(0.5 pto.)

Para la segunda solución, usemos la fórmula de Liouville:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx,$$

así

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x\,\mathrm{sen}(2\log(x)) \int \frac{1}{x^2 \mathrm{sen}^2(2\log(x))} x dx \\
&= x\,\mathrm{sen}(2\log(x)) \int \frac{1}{x \mathrm{sen}^2(2\log(x))} dx \\
&= x\,\mathrm{sen}(2\log(x)) \frac{1}{2}(-\cot(2\log(x))) \\
&= -\frac{x}{2}\cos(2\log(x)).
\end{aligned}$$

(0.5 pto.)

entonces

$$y_h(x) = c_1 x\,\mathrm{sen}(2\log(x)) - c_2 \frac{x}{2}\cos(2\log(x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) La función de Green se define como:

$$G(x,s) = \frac{1}{W(y_1,y_2)(s)}(-y_1(x)y_2(s) + y_2(x)y_1(s)).$$

Así

$$\begin{aligned}
G(x,s) &= \frac{1}{\cancel{s}}\left(-x\,\mathrm{sen}(2\log(x))(-\frac{\cancel{s}}{2}\cos(2\log(s))) - \frac{x}{2}\cos(2\log(x))\cancel{s}\,\mathrm{sen}(2\log(s))\right) \\
&= \frac{1}{2}x\left[\mathrm{sen}(2\log(x))\cos(2\log(s)) - \cos(2\log(x))\mathrm{sen}(2\log(s))\right] \\
&= \frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}(2\log(x) - 2\log(s)) \\
&= \frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}(2\log(x/s)).
\end{aligned}$$

(d) La solución particular queda escrita como:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \int G(x,s)q(s)ds \\
&= \int \frac{1}{2}x\left[\mathrm{sen}(2\log(x))\cos(2\log(s)) - \cos(2\log(x))\mathrm{sen}(2\log(s))\right]\frac{1}{s}ds \\
&= \frac{1}{2}x\mathrm{sen}(2\log(x)) \int \cos(2\log(s))\frac{1}{s}ds - \frac{1}{2}x\cos(2\log(x)) \int \mathrm{sen}(2\log(s))\frac{1}{s}ds \\
&= \frac{1}{4}x\mathrm{sen}(2\log(x))\mathrm{sen}(2\log(s)) + \frac{1}{4}x\cos(2\log(x))\cos(2\log(s)) \\
&= \frac{1}{4}x\mathrm{sen}(2\log(x))\mathrm{sen}(2\log(x)) + \frac{1}{4}x\cos(2\log(x))\cos(2\log(x)) \quad \text{(evaluando } s \text{ en } x\text{)} \\
&= \frac{1}{4}x(\mathrm{sen}^2(2\log(x)) + \cos^2(2\log(x))) \\
&= \frac{1}{4}x.
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución general es:

$$y(x) = c_1 x\,\mathrm{sen}(2\log(x)) - c_2\frac{x}{2}\cos(2\log(x)) + \frac{1}{4}x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}..$$

(e) Notemos que la solución debe ser consistente con lo encontrado en las partes anteriores. Definimos como nos indican $\varphi(t) = y(e^t)$. Derivando la expresión

$$\begin{aligned}
&\varphi'(t) = y'(e^t)e^t \\
&\varphi''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = y''(e^t)e^{2t} + \varphi'(t) \Rightarrow \varphi''(t) - \varphi'(t) = y''(e^t)e^{2t}
\end{aligned}$$

Con la ayuda de estas identidades escribimos la ecuación en términos de φ y t

$$\begin{aligned}
e^{2t}y''(e^t) - e^t y(e^t) + 5y(e^t) &= e^t \\
\varphi''(t) - \varphi'(t) - \varphi'(t) + 5\varphi(t) &= e^t \\
\varphi''(t) - 2\varphi'(t) + 5\varphi(t) &= e^t
\end{aligned}$$

(0.5 pto.)

Ahora resolvemos la ecuación homogenea para φ. El polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

y sus raíces son

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i$$

Por la base para la solución homogénea es $\{e^t \cos(2t), e^t \mathrm{sen}(2t)\}$

(0.8 pto.)

Para la solución particular hay *al menos* tres formas de hacerlo. La *primera* (y más sencilla) es mediante el método de coeficientes indeterminados. Dado que el polinomio diferencial que anula el lado derecho es:

$$P(D) = (D - 1)$$

Se propone una solución particular de la forma $y_p = Ae^t$. (Nótese que no es necesario mencionar el polinomio, sólo hacer la propuesta de solución apropiada). Reemplazamos y_p en la ecuación para encontrar el coeficiente

$$\begin{aligned}
Ae^t - 2Ae^t + 5Ae^t &= e^t \\
A\cancel{e^t}(1 - 2 + 5) &= \cancel{e^t} \Rightarrow A = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Y por lo tanto la solución es

$$y_p = \frac{e^t}{4}$$

La **segunda** manera es mediante el método de variación de parámetros de forma directa. Proponemos una solución $y_p = F_1 y_1 + F_2 y_2$ donde y_1 e y_2 son las soluciones de la solución homogénea y el vector $F = (F_1, F_2)^T$ satisface

$$F = \int \Phi^{-1} \boldsymbol{b} \, dt$$

donde

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}; \Phi = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \cos(2t) - 2\sin(2t) & \sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Luego

$$\Phi^{-1} = \frac{e^{-t}}{\cos(2t)\sin(2t) + 2\cos^2(2t) - \cos(2t)\sin(2t) + 2\sin^2(2t)} \begin{pmatrix} \sin(2t)+\cos(2t) & -\sin(2t) \\ -\cos(2t)+2\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{e^{-t}}{2} \begin{pmatrix} \sin(2t)+\cos(2t) & -\sin(2t) \\ -\cos(2t)+2\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Con lo que

$$\Phi^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \int -\sin(2t)\,dt \\ \int \cos(2t)\,dt \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución particular es

$$y_p = F_1 y_1 + F_2 y_2 = \frac{1}{4}(e^t\cos^2(2t) + e^t\sin^2(2t) = \frac{e^t}{4}$$

Ahora finalmente la **tercera** manera de encontrar la solución particular es mediante el método de variación de parámetros también pero usando la fórmula de Green. Para ello necesitamos la función de Green $R(t,s)$, y el Wronskiano $W(t)$:

$$W(t) = |\Phi(t)| = e^{2t}(\cos(2t)\sin(2t) + 2\cos^2(2t) - \cos(2t)\sin(2t) + 2\sin^2(2t)) = 2e^{2t}$$
$$R(s,t) = \begin{vmatrix} e^t\cos(2s) & e^t\sin(2s) \\ e^s\cos(2t) & e^s\sin(2t) \end{vmatrix} = e^{s+t}\left(\cos(2s)\sin(2t) - \sin(2s)\cos(2t)\right)$$

Ocupando la fórmula de Green tenemos que ($\bar{Q}$ es el lado derecho de la EDO):

$$\begin{aligned} y_p &= \int \frac{\bar{Q}(s)}{W(s)} R(t,s)\,ds \\ &= \int \frac{e^s}{2e^{2s}} e^{s+t}\left(\cos(2s)\sin(2t) - \sin(2s)\cos(2t)\right)\,ds \\ &= \frac{e^t}{2}\left(\sin(2t)\int \cos(2s)\,ds - \cos(2t)\int \sin(2s)\,ds\right) \\ &= \frac{e^t}{2}\left(\frac{\sin^2(2t)}{2} + \frac{\cos^2(2t)}{2}\right) = \frac{e^t}{4} \end{aligned}$$

De cualquier forma la solución general para la ecuación queda

$$y = C_1 e^t\cos(2t) + C_2 e^t\sin(2t) + \frac{e^t}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(0.7 pto.)

Nótese que se recupera la solución encontrada en las partes anteriores revirtiendo en el cambio de variables

$$y = C_1 x\cos(2\log(x)) + C_2 x\sin(2\log(x)) + \frac{x}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

P3. (a) Hay *al menos* dos maneras de demostrar que $W(fy_1, fy_2, fy_3) = f^3 W(y_1, y_2, y_3)$. La **primera** forma es engorrosa (pero válida!), consiste en expandir el determinante de acuerdo a la expansión por subdeterminantes (fórmula de Laplace) por alguna fila o columna, acá mostramos como expandir por la primera fila:

$$
\begin{aligned}
W(fy_1, fy_2, fy_3) &= \begin{vmatrix} fy_1 & fy_2 & fy_3 \\ f'y_1 + fy_1' & f'y_2 + fy_2' & f'y_3 + fy_3' \\ f''y_1 + 2f'y_1' + fy_1'' & f''y_2 + 2f'y_2' + fy_2'' & f''y_3 + 2f'y_3' + fy_3'' \end{vmatrix} \\
&= fy_1 \begin{vmatrix} f'y_2 + fy_2' & f'y_3 + fy_3' \\ f''y_2 + 2f'y_2' + fy_2'' & f''y_3 + 3f'y_3' + fy_3'' \end{vmatrix} \\
&- fy_2 \begin{vmatrix} f'y_1 + fy_1' & f'y_3 + fy_3' \\ f''y_1 + 2f'y_1' + fy_1'' & f''y_3 + 3f'y_3' + fy_3'' \end{vmatrix} \\
&+ fy_3 \begin{vmatrix} f'y_1 + fy_1' & f'y_2 + fy_2' \\ f''y_1 + 2f'y_1' + fy_2'' & f''y_2 + 3f'y_2' + fy_2'' \end{vmatrix} \\
&= fy_1 \left[(f'y_2 + fy_2')(f''y_3 + 2f'y_3' + fy_3'') - (f'y_3 + fy_3')(f''y_2 + 2f'y_2' + fy_2'') \right] \\
&- fy_2 \left[(f'y_1 + fy_1')(f''y_3 + 2f'y_3' + fy_3'') - (f'y_3 + fy_3')(f''y_1 + 2f'y_1' + fy_1'') \right] \\
&+ fy_3 \left[(f'y_1 + fy_1')(f''y_2 + 2f'y_2' + fy_2'') - (f'y_2 + fy_2')(f''y_1 + 2f'y_1' + fy_1'') \right]
\end{aligned}
$$

Después de trabajar (mucho!) la expresión anterior los términos con derivadas de f se cancelan y queda sólo la expresión

$$
f^3 (y_1 y_2' y_3'' + y_1'' y_2 y_3' + y_1' y_2'' y_3 - y_1'' y_2' y_3 - y_1 y_2'' y_3' - y_1' y_2'' y_3'')
$$

La cual es equivalente a $f^3 W(y_1, y_2, y_3)$. La **segunda** forma es ocupar las propiedades del determinante, para mejor claridad del argumento escribimos el Wronskiano con notación vectorial:

$$
W(fy_1, fy_2, fy_3) = \begin{vmatrix} f(y_1, y_2, y_3) \\ f'(y_1, y_2, y_3) + f(y_1', y_2', y_3') \\ f''(y_1, y_2, y_3) + 2f'(y_1', y_2', y_3') + f(y_1'', y_2'', y_3'') \end{vmatrix}
$$

Ocupando la multilinealidad por filas del determinante tenemos que

$$
\begin{aligned}
W(fy_1, fy_2, fy_3) &= \begin{vmatrix} f(y_1, y_2, y_3) \\ f'(y_1, y_2, y_3) \\ f''(y_1, y_2, y_3) + 2f'(y_1', y_2', y_3') + f(y_1'', y_2'', y_3'') \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} f(y_1, y_2, y_3) \\ f(y_1', y_2', y_3') \\ f''(y_1, y_2, y_3) + 2f'(y_1', y_2', y_3') + f(y_1'', y_2'', y_3'') \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Donde el primer determinante es 0 pues la segunda fila es linealmente dependiente de la primera. La tercera fila es combinación lineal de la segunda y la primera, luego podemos aplicar el mismo argumento

$$W(fy_1, fy_2, fy_3) = \begin{vmatrix} f(y_1, y_2, y_3) \\ f(y_1', y_2', y_3') \\ f''(y_1, y_2, y_3) + 2f'(y_1', y_2', y_3') + f(y_1'', y_2'', y_3'') \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(y_1, y_2, y_3) \\ f(y_1', y_2', y_3') \\ f''(y_1, y_2, y_3) \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} f(y_1, y_2, y_3) \\ f(y_1', y_2', y_3') \\ f'(y_1', y_2', y_3') \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(y_1, y_2, y_3) \\ f(y_1', y_2', y_3') \\ f(y_1'', y_2'', y_3'') \end{vmatrix}$$

Luego los dos primeros determinantes son 0 pues tienen filas linealmente dependientes. Por lo tanto

$$W(fy_1, fy_2, fy_3) = \begin{vmatrix} f(y_1, y_2, y_3) \\ f(y_1', y_2', y_3') \\ f(y_1'', y_2'', y_3'') \end{vmatrix} = f^3 W(y_1, y_2, y_3)$$

Donde la última igualdad se justifica por aplicar tres veces la multilinealidad por filas del determinante.

(1.5 pto.)

Para demostrar que el conjunto $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ es linealmente independiente, mostraremos que su Wronskiano es distinto de cero, en algún punto x. Ahora, para el cálculo del Wronskiano, usaremos la parte anterior. Denotemos por:

$$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = x^2, f(x) = e^x,$$

entonces

$$W(e^x, xe^x, x^2e^x) = e^{3x} W(1, x, x^2)$$

Por lo que debemos verificar que $W(1, x, x^2)$ es distinto de cero, en efecto:

$$W(1, x, x^2) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$$

La última igualdad es debido a que el determinante de una matriz triangular es la multiplicación de los elementos de su diagonal.

(1.5 pto.)

P3. (b)

(i) Notemos que como $y_1 > 0$ en (a, b) y $y_1(a) = y_1(b) = 0$ necesariamente la función debe ser no decreciente en a y no creciente en b, es decir $y_1'(a) \geq 0$ y $y_1'(b) \leq 0$. Con esto en mente procedemos, el Wronskiano está dado por

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Luego

$$W(a) = y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = 0 \cdot y_2'(a) - y_1(a)y_2(a) \leq 0$$

La última desigualdad viene del hecho que $y_1(a) \geq 0$ y que $y_2(a) > 0$. Por el mismo argumento

$$W(b) = y_1(b)y_2'(b) - y_1'(b)y_2(b) = 0 \cdot y_2'(b) - y_1'(b)y_2(b) \geq 0$$

(1.0 pto.)

(**ii**) Omitiremos la variable independiente (x) en el siguiente argumento, pero se debe tener en cuenta que todo lo que aparece son funciones. Derivando el Wronskiano

$$W' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - y_1''y_2 - \cancel{y_1'y_2'}$$

Ocupando las ecuaciones

$$y_1'' = -\alpha y_1 \; ; \; y_2'' = -\beta y_2$$

Reemplazando en la derivada del Wronskiano

$$W' = -\beta y_1y_2 + \alpha y_1y_2 = (\alpha - \beta)y_1y_2$$

Y por lo tanto

$$\int_a^b W'(x)\,dx = \int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))y_1(x)y_2(x)\,dx$$

(1.5 pto.)

Para concluir notemos que por el teorema fundamental del cálculo se tiene

$$\int_a^b W'(x)\,dx = W(b) - W(a)$$

Además la integral del lado derecho es negativa pues $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ y $\alpha - \beta < 0$. Luego obtenemos

$$W(b) - W(a) < 0 \iff W(b) < W(a)$$

Lo cual es contradictorio con lo encontrado en (**i**) pues ahí se demostró que

$$W(b) \geq 0 \geq W(a) \iff W(b) \geq W(a)$$

(1.5 pto.)

Por lo tanto la hipótesis de que $y_2 > 0$ es contradictoria y se demuestra que y_2 debe tener un cero en $[a, b]$.