Control 2, MA2601 (1-2) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Primavera 2010

Prof. Felipe Olmos, Julio López, **Aux.** Avelio Sepúlveda, Francisco Bravo, Nikolás Tapia, Sebastián Reyes Riffo.

P1.- (**a**) (2 ptos.) Encuentre la solución de las siguiente EDO de orden 3:

$$y^{(3)} - 5y^{(2)} + 7y' - 3y = 0.$$

(**b**) Considere la ecuación diferencial no homogénea a coeficientes variables:

$$4xy'' + (2 - 8\sqrt{x})y' - 5y = (3\sqrt{x} + 2)e^{-\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

(**i**) (1 pto.) Sea $z(t) = y(t^2)$, demuestre que la ecuación diferencial se reduce a:

$$z''(t) - 4z'(t) - 5z(t) = (3t + 2)e^{-t}.$$

(**ii**) (3 ptos.) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial a coeficientes constantes no homogénea.

P2.- Considere la ecuación diferencial a coeficientes variables de orden 2:

$$x^2y'' - xy' + 5y = x, \quad (x > 0).$$

Para resolver esta ecuación, siga el siguiente procedimiento:

(**a**) (1 pto.) Verifique que $\psi_1(x) = x\,\text{sen}(2\log(x))$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

(**b**) (1 pto.) Calcule el Wronskiano de la ecuación y luego encuentre una segunda solución de la ecuación homogénea asociada.

(**c**) (1 pto.) Determine la función de Green.

(**d**) (1 pto.) Encuentre una solución particular, y luego escriba la solución general de la EDO no homogénea.

(**e**) (2 ptos.) Sea y una solución de la EDO y sea $\varphi(t) = y(e^t)$. Demuestre que φ satisface una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes y encuentre la solución de la ecuación no homogénea resultante.

P3.- (**a**) (3 ptos.) Pruebe que $W(fy_1, fy_2, fy_3) = f^3W(y_1, y_2, y_3)$. Utilice esto para mostrar que el conjunto de funciones $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ es linealmente independiente.

(**b**) (3 ptos.) Sean y_1 e y_2 soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1'' + \alpha(x)y_1 &= 0,\ x \in [a,b] \\ y_2'' + \beta(x)y_2 &= 0,\ x \in [a,b] \end{aligned}$$

Donde $a < b$, α y β son funciones continuas tales que en $[a,b]$ se tiene $\alpha(x) < \beta(x)$. También supondremos que $y_1(a) = y_1(b) = 0$ e $y_1(x) > 0$ en $[a,b]$. Demostraremos que necesariamente y_2 cruza el eje x, es decir que hay un $\bar{x} \in [a,b]$ tal que $y_2(\bar{x}) = 0$. Para ello razonaremos por contradicción suponiendo que $y_2(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$.

(**i**) Demuestre que el Wronskiano de y_1 e y_2 satisface $W(a) \leq 0$ y $W(b) \geq 0$.

(**ii**) Demuestre que el Wronskiano también satisface

$$\int_a^b W'(x)dx = \int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))y_1(x)y_2(x)dx$$

Deduzca una contradicción a lo encontrado en (**i**) y concluya.

Tiempo: 3 horas — Octubre 6, 2010