Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

**Pauta Control 1, MA2601 (1-2) EDO (01/09/10)**

**Prof.** Felipe Olmos, Julio López, **Aux.** Avelio Sepúlveda, Francisco Bravo, Nikolas Tapia, Sebastián Reyes Riffo.

**P1.** (a)

(i) $y' = (y+1)(1+x)$.

<u>Soluciones constantes:</u> $y + 1 = 0 \Rightarrow y(x) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**(0.5 pto.)**

Asumir $(y+1) \neq 0$, entonces

$$\frac{dy}{y+1} = (x+1)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y+1| = \frac{x^2}{2} + x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ó equivalentemente (en caso que quiera despejarlo)

$$y = -1 + c_1 \exp(\frac{x^2}{2} + x), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

**(1.0 pto.)**

(ii) Sea $y = z^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ a determinar. Entonces $y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$. Sustituyendo en la EDO

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = \frac{3x^2 z^\alpha}{z^\alpha + x^3} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha z' = \frac{3x^2 z^\alpha}{z^{2\alpha-1} + x^3 z^{\alpha-1}}.$$

Para que esta ecuación sea homogénea el grado del numerador como el grado del denominador tienen que ser iguales, esto se sucede si y sólo si

$$2\alpha - 1 = \alpha + 2,$$

de donde $\alpha = 3$.

**(0.3 pto.)**

Así, la EDO queda escrita como:

$$z' = \frac{x^2 z^3}{z^5 + x^3 z^2} = \frac{x^2 z}{z^3 + x^3} = \frac{\frac{z}{x}}{\frac{z^3}{x^3} + 1}.$$

Hagamos el cambio de variable: $z = ux \Rightarrow z' = u'x + u$. Con esto, la ecuación queda escrita

$$u'x + u = \frac{u}{u^3+1} \quad \Leftrightarrow \quad u'x = -\frac{u^4}{u^3+1}.$$

Esta última ecuación es a variables separables.

**(0.7 pto.)**

Si $u=0$ entonces $z=0$, de donde $y=0$ (sol. cte).

Asumamos que $u \neq 0$:

$$(\frac{u^3+1}{u^4})du = -\frac{1}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| - \frac{1}{3}\frac{1}{u^3} = -\ln|x| + c.$$

Pero $u = \dfrac{z}{x} = \dfrac{y^{1/3}}{x}$, entonces

$$\ln|\frac{y^{1/3}}{x}| - \frac{1}{3}\frac{x^3}{y} = -\ln|x| + c.$$

ó equivalentemente (después de hacer manipulaciones)

$$\frac{1}{3}\ln|y| - \frac{1}{3}\frac{x^3}{y} = c \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| - \frac{x^3}{y} = c_1.$$

**(0.5 pto.)**

(b)

(i) Supongamos que $\alpha \neq 0, 1$.

<u>1ra forma:</u> Sea $y = z^\alpha$, entonces $y' = \alpha z^{\alpha-1}z'$. Sustituyendo en la ED se obtiene:

$$\alpha z^{\alpha-1}z' = f(x, z^\alpha),$$

de donde

$$z' = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha-1} f\left(x, z^\alpha\right) = \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{1}{z}x, \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha z^\alpha\right) = \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{x}{z}, 1\right).$$

Esta ecuación, es efectivamente una ED homogénea, la cual haciendo el cambio de variable $z = ux$ se convierte a variables separables:

$$u'x + u = \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{1}{u}, 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{1}{u}, 1\right) - u}{x}$$

<u>2da forma:</u>

$$y' = f(x,y) = f\left(x{\cdot}1, x^\alpha \frac{y}{x^\alpha}\right) = x^{\alpha-1}f(1, \frac{y}{x^\alpha}).$$

Hagamos $y = zx^\alpha$, entonces $y' = z'x^\alpha + \alpha z x^{\alpha-1}$. Luego, la ED se escribe como:

$$z'x^\alpha + \alpha z x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}f(1,z) \quad \Leftrightarrow \quad xz' = f(1,z) - \alpha z,$$

de donde la ED a variables separables a resolver es:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(1,z) - \alpha z}{x}.$$

(ii) Consideremos el caso $\alpha = 0$: $f(\lambda x, y) = \lambda^{-1}f(x,y)$. En esta situación, se toma como $\lambda = x$ y así tenemos

$$y' = f(x,y) = f(\lambda{\cdot}1, y) = x^{-1}f(1,y) = \frac{f(1,y)}{x}.$$

Esta ecuación es a variables separables.

**(0.5 pto.)**

Ahora, consideremos el caso $\alpha = 1$: $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. En este caso también se toma como $\lambda = x$, por lo que

$$y' = f(x, y) = f\left(x{\cdot}1, x\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Esto es, llegamos a una ecuación homogénea, y haciendo $y = ux$ se llega a una ecuación a variables separables:

$$u'x + x = f(1, u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{f(1, u) - u}{x}.$$

**(0.5 pto.)**

(iii) Vamos a determinar el valor de $\alpha$ tal que $f(\lambda x, \lambda^\alpha y) = \lambda^{\alpha-1} f(x, y)$:

$$f(\lambda x, \lambda^\alpha y) = \frac{1}{2}\lambda^{\alpha-1}\frac{y}{x} - 3\lambda^{1/2-2\alpha}\frac{\sqrt{x}}{y^2}.$$

Para factorizar la función $f$, se debe de tener que $\alpha - 1 = 1/2 - 2\alpha$, de donde se tiene que $\alpha = \frac{1}{2}$.

**(0.5 pto.)**

**P2.(a)** (i) Buscamos soluciones particulares de la ecuaciones de la forma $y_p = ax^b$, notemos que

$$y_p' = abx^{b-1} \ ; \ y_p^2 = a^2x^{2b}$$

Luego reemplazando en la ecuación tenemos que

$$abx^{b-1} + ax^{b-1} - a^2x^2b = -4x^{-2}$$

Necesariamente entonces tiene que suceder que

$$b - 1 = 2b = -2$$

Lo cual sucede si y solamente si $b = -1$, reemplazando este valor tenemos que

$$-ax^{-2} + ax^{-2} - a^2x^{-2} = -4x^{-2}$$

Por lo tanto

$$-a^2 = -4x^{-2}$$

Lo cual implica que $a = \pm 2$. Tomar cualquiera de las dos soluciones está OK.

**(1.0 pto.)**

(ii) **Obs:** La ecuación tiene sentido sólo si $x \neq 0$.

Buscamos una solución mediante el método de resolución de la ecuación de Riccati, es decir usamos el cambio de variables:

$$y = y_p + \frac{1}{z} = \frac{2}{x} + \frac{1}{z}$$

con esto

$$y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

Reemplazamos esto en la ecuación

$$\cancel{-\frac{2}{x^2}} - \frac{z'}{z^2} + \cancel{\frac{2}{x^2}} + \frac{1}{xz} - (\frac{2}{x} + \frac{1}{z})^2 = -\frac{4}{x^2}$$

**(0.5 pto.)**

Continuamos el desarrollo

$$-\frac{z'}{z^2}+\frac{1}{xz}\cancel{-\frac{4}{x^2}}-\frac{4}{xz}-\frac{1}{z^2}=\cancel{-\frac{4}{x^2}}$$
$$-z'-\frac{3z}{x}-1=0$$
$$z'+\frac{3z}{x}=-1$$

**(0.5 pto.)**

Ahora resolvemos esta ecuación via factor integrante.

$$\mu(x)=\exp\left(\int 3/x\ dx\right)=|x|^3$$

Por lo tanto la solución homogénea es

$$z_h=\frac{C}{|x|^3}$$

**(0.3 pto.)**

y la particular

$$z_p=\frac{1}{|x|^3}\int -1|x|^3\ dx$$

Acá hay dos alternativas válidas para integrar, ponerse en los casos $x>0$ y $x<0$ o ocupar la función signo y sus propiedades. Lo hacemos de la última forma:

$$z_p=-\frac{1}{sgn(x)x^3}\int sgn(x)x^3\ dx=-\frac{1}{\cancel{sgn(x)}x^3}\cancel{sgn(x)}\int x^3\ dx=-\frac{x^4}{4x^3}=-\frac{x}{4}$$

(la función signo tiene la propiedad que sale de las integrales). Por lo tanto la solución encontrada es

$$z=z_h+z_p=\frac{C}{|x|^3}-\frac{x}{4}$$

**(0.6 pto.)**

Finalmente debemos devolvernos en los cambios de variables

$$y=\frac{2}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}+\frac{1}{\frac{C}{|x|^3}-\frac{x}{4}}$$

**(0.1 pto.)**

**P2.(b)** Tenemos las hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad Global. Por lo tanto el problema (PC) tiene solución única que llamammos $u(x)$.

**(0.5 pto.)**

Definamos $\varphi(x)=u(-x)$. Si derivando $\varphi$ tenemos que

$$\varphi'(x)=(u(-x))'=-u'(-x)$$

Como $u$ satisface la ecuación tenemos que

$$-u'(-x) = -f(-x, u(-x))$$

Usando la imparidad en la primera variable de $f$ tenemos que

$$\varphi'(x) = -u'(-x) = f(x, u(-x)) = f(x, \varphi(x))$$

Por lo que $\varphi$ satisface la ecuación. Pero también satisface la condición inicial de (PC) pues

$$\varphi(0) = u(-0) = u(0) = y_0$$

Luego $\varphi$ es una solución al problema (PC) por lo tanto por la unicidad se debe tener que $\varphi(x) = u(x)$. Y por lo tanto $u(-x) = \varphi(x) = u(x)$ con lo cual la (única) solución es par.

**(2.5 pto.)**

**P3.(a)** La ecuación es de segundo orden sin variable dependiente. Por lo tanto usamos el cambio $z = y'$. Reemplazando en la ecuación

$$z' + 4z = 0$$

**(0.5 pto.)**

Como es una ecuacion lineal de primer orden homogénea se puede usar factor integrante o variables separables (también es válido suponer que la solución es de la forma $Ae^{bt}$). Mostraremos como hacerlo con factor integrante:

$$\mu(x) = \exp\left(\int 4\ dx\right) = e^{4x}$$

Por lo tanto la solución homogénea ( y general pues es una ecuación homogénea) es

$$z = z_h = C_1 e^{-4x}$$

**(0.5 pto.)**

Ahora para encontrar la solución original nos devolvemos a $y$

$$\begin{aligned} y' &= C_1 e^{-4x} \\ y &= C_1 \int e^{-4x}\ dx + C_2 \\ &= -\frac{C_1}{4} e^{-4x} + C_2 \end{aligned}$$

Aplicamos las condiciones iniciales para encontrar $C_1$ y $C_2$

$$\begin{aligned} y(0) &= -C_1/4 + C_2 = a \\ y'(0) &= C_1 = b \end{aligned}$$

Y por lo tanto $C_1 = b$ y $C_2 = a + \frac{b}{4}$

**(0.8 pto.)**

Como

$$\lim_{x\to\infty} y(t) = C_2$$

tenemos que la constante buscada es $a + \frac{b}{4}$.

**(0.2 pto.)**

**P3.(b)** (i) Ocupamos la ley de Torricelli para modelar el vaciado del tanque. Esto es que la velocidad de caída del agua es igual a $\sqrt{2gh(t)}$ cuando la altura de esta en el tanque es $h(t)$

**(0.2 pto.)**

Infinitesimalmente tenemos que el volumen de agua que cae en un instante $t$ es

$$(\text{Área del orificio}) \times (\text{Velocidad de caída}) \times dt = \pi\rho^2\sqrt{2gh(t)}dt$$

Por lo tanto el volumen que ha salido hasta el instante $t$ está dado por

$$V_S(t) = \int \pi\rho^2\sqrt{2gh(s)}\, ds \tag{0.1}$$

(También pueden darse argumentos con $\Delta t$).

**(0.3 pto.)**

Notemos que volumen de agua que ha salido también es igual a la diferencia de volumen dentro del tanque entre el tiempo 0 y el tiempo $t$

$$V_S(t) = V_D(0) - V_D(t) = \frac{1}{3}\pi H_0 R^2 - \frac{1}{3}\pi h(t) r(t)^2$$

El radio $r(t)$ se puede obtener mediante la relación

$$\tan(\theta/2) = \frac{R}{H_0} = \frac{r(t)}{h(t)},$$

donde $\theta$ es el ángulo de apertura del cono. Luego $r(t) = \frac{Rh(t)}{H_0}$ (Un argumento de semejanza de triángulos también es válido). Luego la expresión para $V_S$ es

$$V_S(t) = V_D(0) - V_D(t) = \frac{1}{3}\pi H_0 R^2 - \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{H_0^2} h(t)^3$$

**(0.5 pto.)**

Luego juntando lo anterior con la ecuación (0.1) tenemos que:

$$\int \cancel{\pi}\rho^2\sqrt{2gh(s)}\, ds = \frac{1}{3}\cancel{\pi}R^2(H_0 - \frac{h(t)^3}{H_0^2})$$

Derivando esta ecuación tenemos que

$$\rho^2\sqrt{2gh(t)} = -\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}\frac{R^2}{H_0^2}h(t)^2h'(t)$$

(Si ya llegan a algo como esto **tienen todo el puntaje**). Arreglando la ecuación tenemos que

$$\frac{h(t)^2h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\frac{H_0^2}{R^2}\sqrt{2g}\rho^2$$

La cual es una ecuación de variables separables.

**(0.5 pto.)**

(ii) Resolvemos la ecuación por variables separables:

$$\int \frac{h^2}{h^{\frac{1}{2}}}\ dh = -\frac{H_0^2}{R^2}\sqrt{2g}\rho^2 t + C$$
$$\int h^{\frac{3}{2}}\ dh = -\frac{H_0^2}{R^2}\sqrt{2g}\rho^2 t + C$$
$$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} = -\frac{H_0^2}{R^2}\sqrt{2g}\rho^2 t + C$$

Con lo cual tenemos

$$h(t) = \left(-\frac{H_0^2}{R^2}\frac{5\sqrt{2g}}{2}\rho^2 t + \frac{5}{2}C\right)^{\frac{2}{5}}$$
$$h(t) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\frac{H_0^2}{R^2}\sqrt{g}\rho^2 t + \frac{5}{2}C\right)^{\frac{2}{5}}$$

**(1.5 pto.)**

(iii) Reemplazando en la formula obtenida $h(0) = H_0$ tenemos que

$$C = \frac{2}{5}H_0^{\frac{5}{2}}$$

**(0.5 pto.)**

Por lo que el modelo queda finalmente

$$h(t) = \left(H_0^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}\frac{H_0^2}{R^2}\sqrt{g}\rho^2 t\right)^{\frac{2}{5}}$$
$$h(t) = H_0\left(1 - 5\sqrt{\frac{g}{2H_0}}\frac{\rho^2}{R^2}t\right)^{\frac{2}{5}}$$

Para encontrar el tiempo $t^*$ en el cual el tanque está vacío imponemos en la fórmula $h(t^*) = 0$ de lo cual se deduce

$$t^* = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}\frac{R^2}{\rho^2}$$

**(0.5 pto.)**