Pendientes Aux 8.

P2 b) Idéntico a la parte a) (DEBEN saber hacerlo!)

P3 a) f holom $\rightarrow$ cumple Cauchy - Riemann

$f = u + iv \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (CR)

además $u = v^2 \Rightarrow \underset{(1)}{\frac{\partial u}{\partial x} = 2v\frac{\partial v}{\partial x}} \wedge \underset{(2)}{\frac{\partial u}{\partial y} = 2v\frac{\partial v}{\partial y}}$

de (1): $\frac{\partial u}{\partial x} = 2v\frac{\partial v}{\partial x} \underset{CR}{=} 2v\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \underset{(2)}{=} 2v\left(-2v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -4v^2\frac{\partial v}{\partial y} \underset{(CR)}{=} -4v^2\frac{\partial u}{\partial x}$

ie. $\frac{\partial u}{\partial x} = -4v^2\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(1+4v^2) = 0$. $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$!

Luego $1 + 4v^2 \neq 0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \underset{(CR)}{=} \frac{\partial v}{\partial y}$

análogamente (partiendo de (2)) $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}$ $\therefore$ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\underset{D(0,1)}{\Rightarrow}$ u y v ctes en $D(0,1)$ (de $\mathbb{R}^2$)

convexo $\therefore f \equiv$ cte. en $D(0,1)$ (de $\mathbb{C}$)

b) $f(z) = -\frac{1}{2}\log(1-z^2)$ Queremos su serie de pot. entorno a $z_0 = 0$.

Notemos que $f'(z) = +\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot (+\cancel{2}z) = \frac{z}{1-z^2}$ a esta expresión es fácil sacarle su serie de pot.

$\therefore$ Det. la serie de f' y después volvamos (de forma rigurosa) a la primitiva.

En efecto: $f'(z) = \frac{z}{1-z^2} = z \cdot \frac{1}{1-z^2} \underset{\text{suma geométrica}}{=} z \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}$

Definamos entonces: $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} z^{2n+2}$ (que sería integrar término a término $f'(z)$)

$\Rightarrow h'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{2n+2}} \cdot \cancel{(2n+2)} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} = f'(z)$ $\therefore f'(z) = h'(z)$

$f'(z) = h'(z) \ \forall z \in D(0,R)$ con R radio de conv de la serie.

$\Rightarrow f = h + \text{cte.}$ pero! $f(0) = h(0) + C \Rightarrow 0 = 0 + C$

$\uparrow$ disco es convexo!

$f(0) = -\frac{1}{2}\log(1-0) = -\frac{1}{2}\log(1) = 0$, $\quad h(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \cdot 0^{2n+2} = 0$. $\quad \boxed{C=0}$

$\Rightarrow \boxed{f=h}$ y $\therefore$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+2}}{2n+2}$ es la rep. de f en serie de potencias.

P4 Resolver: $e^z = i$ y $\sin z = i$

$e^z = i$ $\quad e^z = e^{x+iy} = i$ pero $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

$\Rightarrow i = \underbrace{e^x \cos y}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{e^x \operatorname{sen} y}_{\in \mathbb{R}}$. $\Rightarrow \begin{array}{l} e^x \cos y = 0 \\ e^x \operatorname{sen} y = 1 \end{array}$ pero $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

así: $\cos y = 0$ si $y = y_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. $k \in \mathbb{Z}$.

Notando que $\operatorname{sen} y_k = \begin{cases} 1 & k \text{ par} \\ -1 & k \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow$ la sol es $x = 0$, $y_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ k par.

$\boxed{\text{ie. } z = iy_k = i\frac{\pi}{2}(2k+1) \ k \text{ par.}}$

$\sin z = i$

Recordemos que, si $z = x+iy$: $\sin z = \cosh y \cdot \sin x + i \cdot \sinh y \cdot \cos x = i$

$\Rightarrow$ igualando parte real e imag: $\cosh y \cdot \sin x = 0$ (1)
$\sinh y \cdot \cos x = 1$ (2)

Para cumplir (1): $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Usándolo en (2): si n es par: $\cos(x_n) = 1 \Rightarrow$ basta tomar $y = \operatorname{arcsinh}(1)$.

n impar: $\cos(x_n) = -1 \Rightarrow$ basta tomar $y = \operatorname{arcsinh}(-1)$.

$\therefore$ La sol es $z_n = x_n + iy_n$ con: $x_n = n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$
$y_n = \operatorname{arcsinh}(1)$ n par
$y_n = \operatorname{arcsinh}(-1)$ n impar.

P5 | **Pdq** $A(D) = \frac{1}{2i}\oint_\Gamma \bar{z}\,dz$ con Γ camino cerrado simple, recorrido en sentido antihor. que encierra a la región D.

Sol. Notemos que: $\oint_\Gamma \bar{z}\,dz \underset{\substack{z = x+iy \\ \Rightarrow \bar{z} = x-iy}}{=} \oint_\Gamma (x-iy)(dx+idy) = \oint_\Gamma x\,dx + \cancel{\ldots}\; ix\,dy - iy\,dx - \overbrace{i^2}^{(-1)} y\,dy$

$$= \oint_\Gamma x\,dx + y\,dy + i(x\,dy - y\,dx) = \oint_\Gamma x\,dx + y\,dy + i\oint_\Gamma x\,dy - y\,dx$$

El Teorema de Green dice: $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dA := \oint_\Gamma f_1\,dx + f_2\,dy$

$(\vec{F} = (f_1, f_2))$

En nuestro caso: $\oint_\Gamma \underbrace{x}_{f_1}\,dx + \underbrace{y}_{f_2}\,dy = \iint_D \left(\overbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}^{0} - \overbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}^{0}\right) dA = \iint_D 0\,dA = 0$

$$y\; i\oint_\Gamma \underbrace{x}_{f_2}\,dy - \underbrace{y}_{f_1}\,dx = i\iint_D \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dA = i\iint_D \overbrace{(1-(-1))}^{2}\,dA = 2i\iint_D dA$$

$$= 2i\,A(D).$$

$\Rightarrow$ juntando los resultados:

$$\frac{1}{2i}\oint_\Gamma \bar{z}\,dz = \frac{1}{2i}\left(2i\cdot A(D)\right) = A(D)$$ que era lo deseado. ↯

Obs. el hecho que $\oint_\Gamma \bar{z}\,dz = A(D) \neq 0$ en general! Esto <u>NO</u> contradice Cauchy-Goursat, sólo se puede concluir que $\bar{z}$ <u>no</u> es holomorfa.

$\left(\bar{z} = \underbrace{x}_{u} - i\underbrace{y}_{v=-y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \neq 1 \Rightarrow\right.$ <u>NO</u> se cumplen las condiciones de Cauchy Riemann!$)$

P4 Aux 10. (1)

a) Pdq $\forall\, n > k \geq 1$, $n, k \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}\, dz$

$\Gamma \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ camino cerrado simple que encierra al origen, recorrido en sentido antihorario.

Sol. La función $f_n(z) = \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}$ tiene a 0 como polo de orden $(k+1)$

En efecto: $\lim_{z\to 0} \cancel{z^{k+1}} \frac{(z+1)^n}{\cancel{z^{k+1}}} = 1^n = 1 \neq 0$ y $\lim_{z\to 0} z^\alpha \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} \nexists$ si $\alpha < k+1$.

pues: $\lim_{z\to 0} \frac{(z+1)^n}{\underbrace{z^{k+1-\alpha}}_{>0 \text{ pues } \alpha < k+1}}$ es del tipo $\frac{cte}{0}$

$\Rightarrow$ el lim $\nexists$ si $\alpha < k+1$.

$\therefore$ 0 es polo de orden $k+1$.

$\Rightarrow \Gamma$ encierra a 0

$\Rightarrow$ Por Teo residuos: $\oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$

Calculemos el Residuo (orden $(k+1)$)

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{((k+1)-1)!} \frac{d^{(k+1)-1}}{dz^{(k+1)-1}} \left(\cancel{z^{k+1}} \cdot \frac{(z+1)^n}{\cancel{z^{k+1}}} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left((z+1)^n\right)$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (z+1)^{n-k}$$

mi quita mi pone

$$= \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{1} = \frac{1}{k!} \overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}^{n!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}\, dz = \frac{1}{\cancel{2\pi i}} \left(\cancel{2\pi i} \binom{n}{k} \right) = \binom{n}{k}$$ que era lo deseado.

b) Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$.

Sol. Gracias a (a) $\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}} dz$ con Γ curva simple cerrada que encierra al orig.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^{2n}}{\underbrace{z^{n+1}}_{z^n \cdot z}} dz \right) \frac{1}{5^n} \underset{\substack{\text{meto } 5^n \\ \text{a la integral}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^{2n}}{(5z)^n} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left[\frac{(z+1)^2}{5z} \right]^n \frac{dz}{z}$$

nos gustaría poder cambiar el orden de la integral con la serie, pues tendríamos una suma geométrica! (y así desaparecería!), pero hay que tener cuidado al hacer eso, pues es válido solo para algunos caminos Γ, (sin este cuidado podríamos tomar $\Gamma = \{|z| = R\}$ con R suf. grande y concluir que la serie vale 0, lo cual <u>no</u> es cierto!)

Para esto, notemos que: En caso de ser válido:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left[\frac{(z+1)^2}{5z} \right]^n \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(z+1)^2}{5z} \right]^n}_{\sum_{n=0}^{\infty} r^k} \right) \frac{dz}{z}$$

queremos que $\sum_{n=0}^{\infty} r^k$ converge si $|r| < 1 \Rightarrow \left| \frac{(z+1)^2}{5z} \right| < 1$.

Entonces, sea $\Gamma = D(0,1)$, en este caso: $|z| < 1. \Rightarrow \left| \frac{(z+1)^2}{5z} \right| < \left| \frac{(|z|+1)^2}{5|z|} \right| = \frac{(1+1)^2}{5} = \frac{4}{5} < 1$

luego en $\Gamma = D(0,1)$ la serie converge uniformemente! (pues estamos dentro del disco de converg.)

$\Rightarrow$ se puede cambiar suma con integral!

$$\Rightarrow \sum^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \ldots = \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(0,1)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(z+1)^2}{5z} \right]^n \right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - \frac{(z+1)^2}{5z}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\frac{5z - (z^2+2z+1)}{5\cancel{z}}} \frac{dz}{\cancel{z}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{5}{5z - z^2 - 2z - 1}\, dz = \frac{-5}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$$ esta última integral la calculamos por residuos.

Polos? $z^2 - 3z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

pero $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow$ queda fuera de $|z| = 1$.

$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \Rightarrow$ queda dentro de $|z| = 1$

Claramente los polos son de orden 1 (pues son las 2 raíces de un pol de grado 2)

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-3z+1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\underbrace{\frac{1}{z^2 - 3z+1}}_{f}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \lim_{z \to \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cancel{\left(z - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)} \cdot \frac{1}{\cancel{\left(z-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}\left(z - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}$$

$$= \lim_{z \to \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{\left(z - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2}{\cancel{3}-\sqrt{5}-\cancel{3}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{-\cancel{2}\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

finalmente: $$\frac{-5}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-3z+1} = \frac{+5}{\cancel{2\pi i}} \cdot \cancel{2\pi i} \cdot \frac{+1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

es decir: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$ que era lo deseado ■