Auxiliar 3 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Martes 31 de Agosto, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Calcule el gradiente de:

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pregunta 2.

a) Sea Γ una curva simple, suave por tramos, cerrada, en $\mathbb{R}^2$ y sea Ω la región interior a Γ. Demuestre que el área de Ω es igual a:

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_\Gamma xdy - ydx$$

b) A partir de lo anterior, calcule las áreas obtenidas al segmentar la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuando esta es dividida por la recta de ecuación $x = k$ (donde $|k| < a$).

c) Calcule el área de la **astroide**, curva definida por la ecuación:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Indicación: Parametrice apropiadamente (piense en como parametrizamos una elipse o un circulo)

Pregunta 3. Considere el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ y la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ con $R > 0$ constante. Se le pide:

a) Determinar el área de la parte del cono que está dentro de la esfera.
b) Determinar el área de la parte de la esfera que está dentro del cono.

Pregunta 4. Demuestre que las fórmulas para las áreas de las superficies de revolución de una función de una variable (i.e. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$) en torno al eje x e y, las cuales fueron vistas en el curso de cálculo, y que son respectivamente:

$$A_x(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$A_y(f) = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Son consistentes con la definición de área dada en nuestro curso.

Pregunta 5. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide a la esfera unitaria S en dos regiones: S_1 y S_2, donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$

Pregunta 6. Sea S la esfera de radio R y $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ (que no está en S). Demuestre que:

$$\iint_S \frac{1}{||\vec{x} - \vec{p}||} dA = \begin{cases} 4\pi R & \text{Si } \vec{p} \text{ está en } int(S) \\ 4\pi R^2/d & \text{Si } \vec{p} \text{ no está en } int(S) \end{cases}$$

Determine d en el segundo caso.
Indicación: Note que no hay pérdida de generalidad al suponer que $\vec{p} = ||\vec{p}||\hat{k}$ (Esto pues, en caso contrario basta realizar una rotación de los ejes, lo cual deja el resultado invariante)