Auxiliar 11 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Martes 02 de Noviembre, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Demuestre que: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ con $a > 1$

b) Para $a > 1$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$ evalúe las integrales:

$$C_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{a - \cos\theta}d\theta \quad S_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\theta}{a-\cos\theta}d\theta$$

Hint: Calcule $C_n(a) + iS_n(a)$

Pregunta 2. Pruebe que para cualquier complejo ζ fijo se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\zeta\cos\theta}d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta^n}{n!}\right)^2$$

Indicación: Recuerde que la expansión en serie de potencias de e^z es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

Pregunta 3. El objetivo de este problema es probar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Para ello, integre la función $f(z) = \dfrac{e^{az}}{e^z+1}$ en la región rectangular de vértices: $-R, R, -R+2\pi i, R+2\pi i$

Pregunta 4.

a) Pruebe que si $n \geq m+2$ entonces:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^m}{x^n+1}dx = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}(m+1)\right)}$$

Hint: Considere una sección circular de ángulo $2\pi/n$

b) Se definen las funciones a valores complejos f_n con $n \in \mathbb{Z}$, definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = \pi^{-1/2}\frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}$$

Pruebe que estas funciones son ortonormales, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\overline{f_n(x)}dx = \delta_{m,n}$$

Pregunta 5. Demuestre que:

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx = \pi\ln 2$$

Para ello considere la función $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{z^2+1}$ e integre en un contorno adecuado.