Auxiliar Extra Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Martes 26 de Octubre, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Considere los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ definidos por:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$

c) Explicite en términos de u y v a que corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$

d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, se define el Laplaciano de f mediante: $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$. Si $\Delta f = 0$ en Ω decimos que f es armónica en Ω. Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω. Pruebe además que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω.

Pregunta 2. Resuelva en el plano complejo las ecuaciones $e^z = i$ y $\sin z = i$

Pregunta 3. Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$ una función holomorfa en $|z| < 1$, con u y v funciones a valores reales. Demuestre que:

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})^2 d\theta = \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})^2 d\theta$$

Para $0 < r < 1$ si $u(0)^2 = v(0)^2$

Pregunta 4.

a) Demuestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta = \frac{2\pi}{ab}$ con $a, b > 0$
<u>Indicación:</u> Use $f(z) = \frac{1}{z}$ y el camino dado por la elipse centrada en el origen de semiejes a y b.

b) Calcule $\displaystyle\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz$

Pregunta 5.

a) Demuestre, sin utilizar el teorema de los residuos, que para todo par de enteros $n > k \geq 1$:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz$$

Con $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, recorrido en sentido antihorario.

b) A partir de lo anterior, demuestre que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$

Pregunta 6. El objetivo de este problema es dar una demostración alternativa al Teorema Fundamental del Álgebra, es decir, probaremos que: "Todo polinomio no constante, con coeficientes complejos posee al menos una raíz compleja". Para ello, siga los siguientes pasos:

- **a)** Sean $p(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ y $q(z) = \overline{a_0} + \cdots + \overline{a_n} z^n$ con $n \geq 1$. Pruebe entonces que $r \in \mathbb{C}$ es raíz de p sí y solo sí $\overline{r}$ es raíz de q. Concluya que si p no tiene raíces, entonces q tampoco las tiene. Y por lo tanto, la función definida por $f(z) = \frac{1}{p(z)q(z)}$ es holomorfa.
- **b)** Utilizando el teorema de Cauchy-Goursat en una semi-circunferencia llegue a una contradicción. Concluya.

Pregunta 7. Considere la función $f(z) = e^{1/z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Justifique que el coeficiente que acompaña al término z^k, $k \in \mathbb{Z}$, de la serie de Laurent de $f(z)$ en torno al punto $z_0 = 0$ está dado por $a_k = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{e^{1/w}}{w^{k+1}} dw$ donde la circunferencia $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ está orientada de forma apropiada. Muestre que:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta + k\theta) d\theta$$

.

Encuentre la serie de Laurent de $f(z)$ en torno a $z_0 = 0$ por un método distinto y concluya que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta - n\theta) d\theta = \frac{1}{n!}$$

Pregunta 8. Considere $f(z) = exp(z + 1/z)$

- **a)** Calcule los coeficientes de Laurent de f en $A = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z| < \infty\}$
- **b)** Clasifique la singularidad de f en 0 y muestre que:

$$Res(f, 0) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k-1)!}$$

Pregunta 9. Determine la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$ en los siguientes anillos:

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\} \quad A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$$