

Pauta Pendientes Auxiliar 9 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Martes 19 de Octubre, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega

Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 4. Pruebe el Teorema de Riemann para singularidades removibles: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, y $p \in \Omega$. Sea $f \in H(D \setminus \{p\})$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) f se puede extender de manera holomorfa a todo Ω
- b) f se puede extender de manera continua a todo Ω
- c) Existe una vecindad de p donde f es acotada
- d) $\lim_{z \rightarrow p} (z - p)f(z) = 0$

Solución: Las implicancias $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d)$ son triviales, en efecto:

a) $\Rightarrow$ b): Si extendemos de manera holomorfa en particular extendemos de manera continua (ser holomorfa es una propiedad más fuerte!)

b) $\Rightarrow$ c): Dado que f se puede extender de manera continua a todo Ω , entonces tenemos que la extensión es continua en p , en tal caso, denotando por simplicidad f a la extensión, si es continua en p , basta tomar una vecindad compacta (cerrada y acotada) por ejemplo $\overline{D}(p, r) \subset \Omega$ con $r > 0$ suficientemente pequeño para que el conjunto esté contenido en Ω (esto se puede hacer pues Ω es abierto).

Como la extensión f es continua en todo Ω y $\overline{D}(p, r)$ es cerrado y acotado, entonces f alcanza su máximo en tal conjunto, el cual es finito (por definición de continuidad) y acota a f en tal vecindad, que es lo deseado.

c) $\Rightarrow$ d): Basta notar que, si f está acotado en una vecindad de p , que llamaremos $\mathcal{N}_p$, entonces:

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathcal{N}_p$$

Luego, $\forall z \in \mathcal{N}_p$:

$$|(z - p)f(z)| \leq |z - p|M \Rightarrow \lim_{z \rightarrow p} |(z - p)f(z)| \leq \lim_{z \rightarrow p} |z - p|M = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{z \rightarrow p} (z - p)f(z) = 0$$

Finalmente, probemos la implicancia más difícil, a partir del límite d) debemos probar que podemos extender f de manera holomorfa a todo Ω

d) $\Rightarrow$ a) Definamos la siguiente función:

$$h(z) = \begin{cases} (z - p)^2 f(z) & \text{si } z \neq p \\ 0 & \text{si } z = p \end{cases}$$

Es claro que h es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ pues en tal caso es composición de funciones holomorfas en tal dominio. Notemos además que:

$$h'(p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{(z - p)^2 f(z) - 0}{z - p} = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)f(z) = 0$$

lo último viene de la hipótesis d).

Así, se concluye que $h(z)$ es holomorfa en Ω , sabemos que en tal caso existe una expansión de Taylor en un disco de radio $r > 0$ centrado en p , es decir:

$$h(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - p)^k$$

con $a_0 = h(p) = 0$, $a_1 = h'(p) = 0$. Finalmente escogiendo:

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z - p)^2}$$

se tiene que g es una extensión holomorfa de f en p (en el resto de Ω se tiene claramente), lo que prueba lo deseado.

Pregunta 5. Demuestre el Teorema de Liouville: Si $f \in H(\mathbb{C})$ es acotada, entonces f es constante en $\mathbb{C}$

Solución: Ver apunte, página 124.