Auxiliar 9 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Martes 19 de Octubre, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega

Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Determine el valor de las siguientes integrales:

- a) $\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$ con orientación antihoraria.
- b) $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$
- c) $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta} d\theta$

Pregunta 2. Sea $f \in H(D(z_0, R))$, entonces $\forall r \in]0, R[$ se tiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Deduzca que para $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0$$

Concluya que:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

Pregunta 3. Sea $f \in H(\Omega \setminus \{0\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ con Ω un conjunto abierto tal que $\overline{D}(0, r) \subseteq \Omega$ para algún $r > 0$. Suponga que existe una sucesión $(z_n)_{n \geq 0} \subseteq \Omega \setminus \{0\}$ tal que $z_n \rightarrow 0$ y $f(z_n) = 0, \forall n \geq 0$. Pruebe que $f \equiv 0$.

Pregunta 4. Pruebe el Teorema de Riemann para singularidades removibles: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $p \in \Omega$. Sea $f \in H(D \setminus \{p\})$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) f se puede extender de manera holomorfa a todo Ω
- b) f se puede extender de manera continua a todo Ω
- c) Existe una vecindad de p donde f es acotada
- d) $\lim_{z \rightarrow p} (z - p)f(z) = 0$

Pregunta 5. Demuestre el Teorema de Liouville: Si $f \in H(\mathbb{C})$ es acotada, entonces f es constante en $\mathbb{C}$

Pregunta 6. Pruebe las siguientes consecuencias del teorema de Liouville

- a) Dadas $f, g \in H(\mathbb{C})$ tal que $|f(z)| \leq |g(z)|$ Entonces: $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \alpha g(z)$
- b) Si $f \in H(\mathbb{C})$ no es constante, entonces el conjunto $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.
- c) Sean $f, g \in H(\mathbb{C})$ tal que $\forall z \in \mathbb{C} : \Re f \leq k \Re g$ para alguna constante real k independiente de z . Pruebe que existen $a, b \in \mathbb{C}$ tal que: $f(z) = ag(z) + b$.