

Auxiliar 7 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Martes 05 de Octubre, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega

Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

- a) Pruebe que $w_k = e^{i2k\pi/n}$ con $k \in \{1, \dots, n-1\}$, son raíces del polinomio $p(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$. Concluya que $p(z) = (z - w_1) \cdots (z - w_{n-1})$
- b) Considere un polígono regular de n lados inscrito en el círculo unitario, tal que uno de sus vértices es $A = (1, 0)$. Al unir cualquier vértice del polígono con todos los restantes se generan $n - 1$ segmentos. A partir del vértice A , escriba las longitudes de los segmentos $AA_1, \dots, AA_{n-1}$ y pruebe que:

$$\prod_{i=1}^{n-1} AA_i = n$$

Pregunta 2.

- a) Sea $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, si $z = x + iy$ entonces $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Suponga que $u = v^2$. Pruebe que f es constante en su dominio.
- b) Sea $f = u + iv$ una función analítica en un conjunto D abierto y conexo, donde u y v son funciones a valores reales. Suponga que existen constantes a, b, c tales que $a^2 + b^2 \neq 0$ y:

$$au + bv = c$$

en D . Pruebe que f es constante en D

Hint: Recuerde que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Pregunta 3.

- a) Sea $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Determine $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es holomorfa.

- b) Encontrar la función analítica $f = u + iv$ tal que su parte real está definida por $u = x^2 - y^2 + 2x$ y además se tiene que $f(i) = 2i - 1$

Pregunta 4. Determine el dominio de convergencia de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n & \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}} & \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} n^{1/n} (z-1)^n \\ \text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} n! (z-i)^{n!} & \text{e)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n) z^n & \text{f)} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (2z-1)^n \end{array}$$

Pregunta 5. Considere una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Determine el radio de convergencia R y pruebe que si $|z| = R$

entonces la serie diverge si:

$a_n = 2$ cuando n es par y $a_n = 1$ cuando n es impar.

Además pruebe que si $|z| < R$ entonces: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{2+z}{1-z^2}$

Hint: Recuerde que si una serie es convergente, entonces la sucesión de sumas parciales es una sucesión de Cauchy.