Auxiliar Extra Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Martes 28 de Septiembre, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide a la esfera unitaria S en dos regiones: S_1 y S_2, donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$

Pregunta 2. *Conservación y unicidad en la ecuación del calor*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular y $u(x, y, z, t)$ la temperatura en (x, y, z) en el instante $t \geq 0$ la cual satisface:

$$(EC) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, y, z, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) & \text{sobre } \Omega \end{cases}$$

donde la condición inicial u_0 es una función de clase $\mathcal{C}^1$. Pruebe que la cantidad:

$$U(t) = \frac{1}{2} \iiint_\Omega u(x, y, z, t)^2 dV + \int_0^t \iiint_\Omega ||\nabla u(x, y, z, s)||^2 dV ds$$

es constante para $t \geq 0$ y deduzca de esto la unicidad de soluciones para (EC)

Pregunta 3. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón tiene como potencial a $U(r) = K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$:

a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico de radio a $(a > 0)$ orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_\Omega U dV$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

Pregunta 4. Sean S una superficie suave y $\vec{P}$ un punto, tales que toda recta que pasa por $\vec{P}$ corta a S en a lo más un punto. Sea Ω la unión de todas las semi-rectas que parten de $\vec{P}$ y pasan por S, y sea ε_a la intersección de Ω con la superficie esférica de centro $\vec{P}$ y radio a. Demuestre que:

$$s = \frac{\text{Area de } \varepsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{(\vec{x} - \vec{P}) \cdot \hat{n}}{||\vec{x} - \vec{P}||^3} dS$$

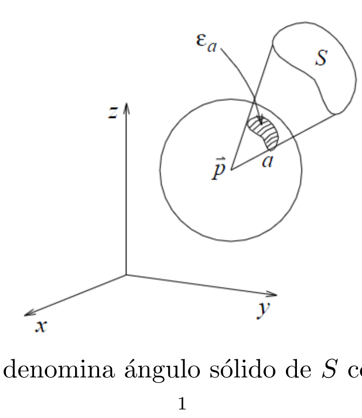

Figura 1: s se denomina ángulo sólido de S con respecto a $\vec{P}$

Pregunta 5.

a) Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua, con $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Pruebe que, si $B_r(p)$ es la bola de centro p y radio r con V_r su respectivo volumen, y S_r es el área asociada a $\partial B_r(p)$, se tiene $\forall p \in U$:

$$f(p) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f dV = \lim_{r\to 0} \frac{1}{S_r} \iint_{\partial B_r(p)} f dS$$

b) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que:

$$rot(\vec{F})(p) \cdot \hat{n} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r(p)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $C_r(p)$ es el círculo de radio r y centro p, que vive en el plano normal a $\vec{n}$.
Además pruebe que:

$$div(\vec{F})(p) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{V_r} \iint_{\partial B_r(p)} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Pregunta 6. *Tercera Ecuación de Maxwell*
La ley de Faraday nos dice que la razón de cambio del flujo magnético a través de un circuito es equivalente (negativamente) a la fuerza electromotriz, es decir:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Pruebe la tercera ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Pregunta 7. Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.

a) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{i} + (y^2 + x)\hat{j} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ

b) Sea ahora $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $rot\vec{F} = 0$ para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el Teorema de Stokes.

Pregunta 8. Considere el campo $\vec{F} = (\alpha e^x yz, e^x z + \beta yz, e^x y + \gamma y^2 + 1)$
Determine los valores de α, β, γ para que el campo $\vec{F}$ sea conservativo, determine su potencial.

Pregunta 9. Considere una superficie $S = C \cup T$ con C correspondiente al manto de un cilíndro con tapa superior, de altura h y radio b al que se le realiza un sacado de altura d y ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (es decir, se le remueve un trozo del manto de las dimensiones especificadas), además T corresponde a la región plana que define un triángulo isosceles de lado d que se pega de forma perpendicular al manto, en el borde del sacado. Determine el borde efectivo de esta región considerando una orientación positiva respecto a la normal.
Haga lo mismo, pero con las caras de un cubo de lado a. ¿Qué opina de su resultado?

Pregunta 10.

a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que:

$$rot \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b rot(\varphi(\vec{r}, t))dt$$

b) Considere el campo vectorial: $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = ||\vec{r}||$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $div\vec{F} = 0$ y pruebe que:

$$rot[\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r})$$

b) Finalmente, considere un campo $\vec{F}$ cualquiera tal que $div\vec{F} = 0$ en una bola B de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar (no lo haga) que lo visto en la parte anterior es válido en B. Definamos $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}]dt$. Usando las partes anteriores, pruebe que $rot\vec{G} = \vec{F}$ en B