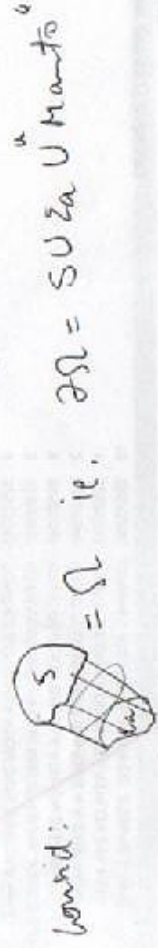


S. Pdg:

$$S = \frac{A \epsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{\vec{x} - \vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{p}\|^3} \cdot \hat{n} dS$$

sol. Queremos usar Gauss, necesitamos un cerramiento.



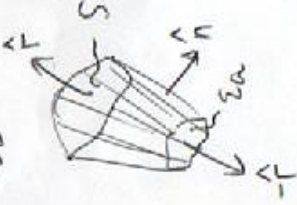
sgz $\vec{p} = \vec{0}$ (En efecto, sino simplemente uso coord. centradas en $\vec{p}$)

Pdg: $S = \frac{A \epsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \hat{n} dS$ notar que, en inf:

$$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \frac{\hat{x}}{r^2}$$

Hagamos Gauss: $\iint_{\partial\Omega} \frac{\vec{F}}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{\hat{x}}{r^2}\right) dV = 0$ (visto antes)

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\hat{x}}{r^2} \cdot \hat{n} dS = 0 = \iint_S \frac{\hat{x}}{r^2} \cdot \hat{n} dS + \iint_{\text{capa}} \frac{\hat{x}}{r^2} \cdot \hat{n} dS + \iint_{\text{Nudo}} \frac{\hat{x}}{r^2} \cdot \hat{n} dS$$



$\hat{n}_S = \hat{x}$ y como el punto que estamos por $\vec{p} \Rightarrow$ por $\vec{p} \Rightarrow$ por $\vec{p} \Rightarrow \hat{x} \perp \hat{n}_w$
 $\Rightarrow \iint_{\text{Nudo}} \frac{\hat{x}}{r^2} \cdot \hat{n} dS = 0$ por $\hat{x} \cdot \hat{n} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \iint_S \frac{\hat{x}}{r^2} \cdot \hat{n} dS &= - \iint_{\text{capa}} \frac{\hat{x}}{r^2} \cdot (-\hat{x}) dS = \iint_{\text{capa}} \frac{1}{r^2} dS \quad \text{por } \epsilon_a \leq S(a) \\ &= \frac{1}{a^2} \iint_{\epsilon_a} dS = \frac{A \epsilon_a}{a^2} \quad \Rightarrow r^2 = a^2 \end{aligned}$$

18) $\vec{F} = (\alpha e^x yz, e^x z + \beta y^2 + 1)$

Si admite pot: $\Rightarrow \exists f$ tq $\vec{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

$\Rightarrow \partial_x f = \alpha e^x yz \Rightarrow f(x, y, z) = \int \alpha e^x yz dx + h_1(y, z)$
 $= \alpha e^x yz + h_1(y, z)$

$\partial_y f = e^x z + \beta y^2 \Rightarrow f(x, y, z) = \int (e^x z + \beta y^2) dy + h_2(x, z)$
 $= y e^x z + \frac{\beta}{3} y^3 + h_2(x, z)$

$\partial_z f = e^x y + \gamma y^2 + 1 \Rightarrow f = \int (e^x y + \gamma y^2 + 1) dz + h_3(x, y)$
 $= z y e^x + \gamma y^2 z + z + h_3(x, y)$

$\Rightarrow \textcircled{a} e^x yz + h_1(y, z) = (z y e^x + \gamma y^2 z + z + h_3(x, y)) \pm (e^x yz + \beta y^3 + h_2(x, z))$

$\alpha = 1, \gamma = \frac{\beta}{3}$

$h_1(y, z) = \gamma y^2 z + cte$

$h_2(x, z) = z + cte$

$h_3(x, y) = cte$

$\circ \circ \circ \quad g = \frac{1}{3} e^x yz + \gamma y^2 z + z + C$. ejemplo lo solicitado con $\gamma = \frac{\beta}{3}$

PS | $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ cont. $U \subset \mathbb{R}^3$ cto.

Sea $p \in U$:

Consider:

$$\left| f(p) - \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(x) dV \right| = \left| \frac{V_r}{V_r} f(p) - \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(x) dV \right|$$

$$= \left| \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(p) dV(x) - \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(x) dV(x) \right|$$

$f(p)$

de dV a la integral!

$$= \left| \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(p) - f(x) dV(x) \right| \text{ notamos que como } f \text{ es cont.} \Rightarrow \text{ es cont. en } p.$$

Quiero, si $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q.:

$$\text{Quiero, si } |p - x| \leq \delta \Rightarrow |f(p) - f(x)| \leq \epsilon. \text{ (Cont. en } p)$$

Más aun, si $r \rightarrow 0 \Rightarrow B_r(p) \rightarrow p$.

Así,

Dado $\epsilon > 0$ basta un r que $|f(p) - \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(x) dV(x)| \leq \epsilon$

En efecto:

$$\left| f(p) - \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(x) dV \right| \leq \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} |f(p) - f(x)| dV(x)$$

Basta consid r suf. $\text{t.q. } |p - x| \leq \delta \Rightarrow |f(p) - f(x)| \leq \epsilon$

$$\Rightarrow \left| f(p) - \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(x) dV \right| \leq \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} \epsilon dV(x) = \frac{\epsilon V_r}{V_r} = \epsilon.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r(p)} f(x) dV.$$

Índice para superficies. (no á alu' a ti me $|p - x| = r$)

(de hecho, en gen si $B_r \rightarrow p \Rightarrow f(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(B_r)} \iiint_{B_r} f dV$)

Si ϵ no necesariamente bola.

2/4

PS 6)

$$\text{pdg } \text{rot}(\vec{F})(p) \cdot \hat{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C(r)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

↑ lo usamos ahí!

En el otro: Consid la superficie sigte:



S_r = círculo de radio r y en $\text{tr}o$ p , con normal $\hat{n}$

$\Rightarrow S_r \subseteq \pi$ plano normal a $\hat{n}$.

$$\partial S_r = C_r(p) \quad \text{obs: } \text{Area}(S_r) = \pi r^2.$$

Por Stokes: $\oint_{C(r)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_r} \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$

$\text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}$ define un campo escalar!

notando que si $r \rightarrow 0 \Rightarrow S_r \rightarrow p$ y por continuidad de $\text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}$ (pues $\vec{F} \in C^1$)

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{C(r)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{S_r} \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$$

$$\Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(S_r)} \oint_{C(r)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(S_r)} \iint_{S_r} \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{C(r)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{rot}(\vec{F})(p) \cdot \hat{n} \quad \text{pues } S_r \rightarrow p \quad + \text{ Continuidad}$$

Para el otro límite el procedimiento es análogo:

$$\text{Tao div: } \iint_{\partial C(r)} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{C(r)} \text{div} \vec{F} \, dV$$

↑ escalar, continua ($\vec{F} \in C^1$)

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_{B(r)} \operatorname{div} \vec{E} dV$$

$B(r) \downarrow$ a) punto $B(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} P$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_{B(r)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \operatorname{div}(\vec{E})(P)$$

P6] Faraday: $\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \oint_{C=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S}$

pero por Leibniz: $\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S}$

(calculamos que $\vec{B} \in C^1$)

$$\Leftrightarrow \iint_S (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall S \text{ superficie.}$$

para concluir basta notar que, como lo anterior vale $\forall S$ superficie, podemos, por P5 considerar $S_P(P)$ y $S_P(P) \rightarrow P$

$$\text{Así } \frac{1}{A(S_r)} \iint_{S_r} (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{A(S_r)} \cdot 0 = 0$$

$\downarrow r \rightarrow 0$

(Esto se puede hacer donde la expresión está definida)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(P) + \nabla \times \vec{E}(P) = 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

$\uparrow$ por simplicidad, supongamos $\mathbb{R}^3$.

$$\text{ie. } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0$$

3/4

P7) Γ = curva de Γ entre $z = x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 1$. $\leftarrow$ esp. unit.
 $\uparrow$ paraboloide



Vamos como parametrizar Γ :

Usamos cilíndricas:

$\vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}$. Vamos condiciones para $\rho \wedge z$:

$$\text{Si } (x, y, z) \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = z \\ \rho^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow z^2 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Solo nos sirve la sol posit (pues $z \geq 0$! dado $z = \rho^2$)

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \rho^2 = z \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$\therefore \Gamma$ se parametriza por $\vec{r}(\theta) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \hat{\rho} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \hat{k}$.

i.e. es una circunf. de radio $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ a altura $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
 $\hookrightarrow$ Centro $\left(0, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.
 así pues: $\vec{F} = (x^2 + y^2) \hat{k} + (y^2 + x) \hat{j} + (z^2 + y) \hat{i}$.

Quisiéramos $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $\vec{F} \in C^0(\mathbb{R}^3)$ (campo de polinomios)

$\Rightarrow$ puedo usar Stokes (Γ es regular, simple, orientable...)

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds \quad \text{pero } \text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}(1-0) + \hat{j}(1-0) + \hat{k}(1-0) = (1, 1, 1)^T$$

Círculo $\xrightarrow{+k}$ pues recorro antihorario $= (1, 1, 1)^T$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\text{círculo}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) ds = \iint_{\text{círculo}} 1 ds = \text{Área}(\text{círculo})$$

$$\hat{n}_{\text{ext}} = +\hat{k}$$

$$= \pi r^2 = \pi \left(\sqrt{\frac{15}{2}} \right)^2$$

$$= \pi \left(\frac{\sqrt{30}}{2} \right)^2$$

b) $\vec{F} = \frac{1}{p} \hat{\theta} + z \hat{k} \leftarrow \text{cilindricas}$

Veamos que $\text{rot } \vec{F} = 0$ ($p \neq 0$), pero la función no está definida en el eje z , en cilindricas:

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{p} \left[\frac{\partial F_z}{\partial r} - p \frac{\partial F_r}{\partial z} \right] \hat{r} + \left[\frac{\partial F_\theta}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \theta} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{p} \left[\frac{\partial}{\partial r} (p F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{k}$$

En nuestro caso: $F_z = z$, $F_r = 0$, $F_\theta = \frac{1}{p}$.

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{p} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{p} \right) - p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{p} \right) \right] \hat{r} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{p} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (z) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{p} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(p \cdot \frac{1}{p} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (0) \right] \hat{k}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot 0 \hat{r} + 0 \hat{\theta} + \frac{1}{p} \cdot 0 \hat{k} = 0 \quad (p \neq 0!)$$

Luego nos piden $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, si pudiéramos aplicar Stokes tendríamos

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\text{círculo}} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

pero esto no se puede hacer directamente, pues el círculo contiene un punto del eje $z \Rightarrow p=0$ y la función no es C^1 en círculo! de hecho así si quisiera quedar bien definida.

Así pues, veremos 2 formas de calcular la integral:

1) Directamente

2) Usando Stokes, pero bien. (Igual deberíamos calcular una integral por definición en este caso)

1) Por definición:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \sqrt{\frac{5-1}{2}} \hat{e}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{5-1}{2}}} \hat{\theta} + \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right) \hat{e} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \hat{\theta} \right) d\theta$$

$$\text{pero } \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 1$$

$$\wedge \hat{\theta} \cdot \hat{e} = 0$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi \neq 0$$

2) Vía Stokes: Como notamos antes, no es posible aplicar Stokes directamente pues la función se da indefinida en $\rho=0$, que queda al interior del círculo. Para remediar esto, consideremos:

$$\Gamma_\epsilon = \Gamma \cup \partial \text{Círculo}(\epsilon) \cup \text{Rectas}(\epsilon)$$

↑ para unir otras curvas, dependen de ϵ !



idea: una entra, la otra "sale", así se cancelan! (Esto es para que quede curva cerrada)

Claramente $\Gamma_\epsilon \rightarrow \Gamma$, más aún, Γ_ϵ es C^1 ahí!!

por esta curva no continúa al eje $z \Rightarrow \vec{F}$ es C^1 ahí!!

$\Rightarrow$ vale Stokes

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Gamma_\epsilon \leftarrow \partial \Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon$$

¡¡¡¡¡horario!

Pero: $\oint_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

↑
la que "entra"
↑
la que "sale"

$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial D(\epsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\partial D(\epsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\partial D(\epsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)$

$\Rightarrow 0$ pues recorren la misma recta en sentidos opuestos!

$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial D(\epsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = - \int_{\partial D(\epsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$

¡¡¡horario!

es decir, reemplazamos el resultado de antes! :)

Obs. Esta última técnica es útil cuando Γ (que encierra una singularidad, y que por lo tanto no permite usar Stokes directamente) es muy complicada de parametrizar, o peor aún, es una curva arbitraria (por suficiente) para aplicar el teorema de Stokes como vimos acá.

Por ejemplo: Si en vez de Γ usamos γ , cualquier curva regular que no encierre y encierre al eje z :

$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ? \rightarrow$ igual que antes! considerar $\Gamma_{\epsilon} = \gamma \cup \partial D(\epsilon) \cup \text{recta}_1 \cup \text{recta}_2$

$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial D(\epsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\partial D(\epsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\partial D(\epsilon)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = 2\pi$

¡¡¡horario! = - ¡¡¡horario!

$\rightarrow$ ¿Dudas? ¡¡¡¡¡horario! ¡¡¡éxito el jueves!