Auxiliar 5 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Martes 21 de Septiembre, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Dados $\vec{F} \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $g \in \mathcal{C}^1$ pruebe la identidad:

$$div(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g div(\vec{F})$$

Muestre que para todo $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega')$ con $\Omega \cup \partial\Omega \subset \Omega'$ se tiene la identidad de Green:

$$\iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_{\partial\Omega} g \nabla f \cdot d\vec{S}$$

b) Sea S la superficie del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que se encuentra en la región $z \geq 1$ y que se orienta según la normal superior (exterior a la esfera). Calcule el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de S donde $\vec{F}(x, y, z) = (e^z - x^2 y)\hat{i} + (z + xy^2)\hat{j} + y^2\sqrt{1 + z^4}\hat{k}$

Pregunta 2. Se define el campo eléctrico generado por una carga Q como $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$. Sea Ω una región simple sólida en $\mathbb{R}^3$ y S su frontera. Demuestre que:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } (0,0,0) \notin \Omega \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{si } (0,0,0) \in \Omega \end{cases}$$

Este resultado se conoce como el Teorema de Gauss.

Pregunta 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo por caminos de frontera regular $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Considere la ecuación del calor en régimen estacionario con condiciones de borde mixtas:

$$(ECM) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = T_0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = -\alpha u & \text{sobre } \Sigma_2 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $T_0 \geq 0$ son constantes conocidas.

a) Pruebe que en el caso $T_0 = 0$ se tiene $u \equiv 0$ en todo Ω.
Indicación: Pruebe que en este caso se tiene:

$$\iiint_\Omega ||\nabla u||^2 dV + \alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 dA = 0$$

b) Deduzca que la ecuación (ECM) posee a lo más una solución.

c) Resuelva (ECM) para el caso $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : \ a < ||\vec{r}|| < b\}$ con $0 < a < b$, $\Sigma_1 = S(0, a)$, $\Sigma_2 = S(0, b)$
Indicación: Suponga que la solución tiene simetría esférica.

Pregunta 4. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón tiene como potencial a $U(r) = K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$:

a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico de radio a ($a > 0$) orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

Pregunta 5. Sean S una superficie suave y $\vec{P}$ un punto, tales que toda recta que pasa por $\vec{P}$ corta a S en a lo más un punto. Sea Ω la unión de todas las semi-rectas que parten de $\vec{P}$ y pasan por S, y sea ε_a la intersección de Ω con la superficie esférica de centro $\vec{P}$ y radio a. Demuestre que:

$$s = \frac{\text{Area de } \varepsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{(\vec{x} - \vec{P}) \cdot \hat{n}}{||\vec{x} - \vec{P}||^3} dS$$

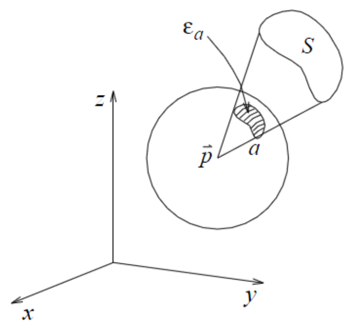

Figura 1: s se denomina ángulo sólido de S con respecto a $\vec{P}$