

CALCULO AVANZADO Y APLICACIONES

AUX 2

Prof: Jaime Ortega
 Aux: Pía Fca. Iryton
 Matías Godoy

Teorema de Green

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regular y simplemente conexo. Sea C una curva recorrida en sentido positivo, con $C: \partial\Omega$ y $F = M\hat{i} + N\hat{j}$ un campo vectorial $F \in (C^1(\Omega))$

Entonces

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$



convexo $\rightarrow$
 simple $\rightarrow$
 multi $\rightarrow$
 conexa $\rightarrow$

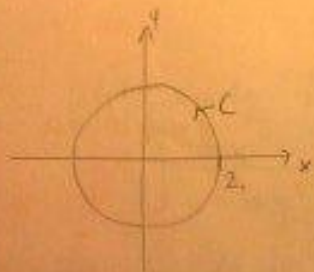
Para regiones simplemente conexas:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) = \oint_C Pdx + Qdy - \int_{C_1} Pdx + Qdy$$

P1 Usando el teorema de Green calcular:

$$\oint_C \left[\frac{(x-1)^2 + y^2 + y}{(x-1)^2 + y^2} \right] dx + \left[\frac{2(x-1)^2 + 2y^2 - (x-1)}{(x-1)^2 + y^2} \right] dy$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ recorrida en sentido antihorario.



$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(2y+1)\{(x-1)^2 + y^2\} - 2y\{(x-1)^2 + y^2 + y\}}{\{(x-1)^2 + y^2\}^2}$$

$$= \frac{(2y+1)(x-1)^2 + y^2(2y+1) - 2y(x-1)^2 - 2y^3 - 2y^2}{\{(x-1)^2 + y^2\}^2}$$

$$= \frac{2y(x-1)^2 + (x-1)^2 + 2y^3 + y^2 - 2y(x-1)^2 - 2y^3 - 2y^2}{\{(x-1)^2 + y^2\}^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{\{(x-1)^2 + y^2\}^2}$$

Ahora hacemos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(4(x-1) - 1) \cdot \{(x-1)^2 + y^2\} - 2(x-1) \{2(x-1)^2 + 2y^2 - (x-1)\}}{\{(x-1)^2 + y^2\}^2}$$

$$= \frac{4(x-1)^3 + 4y^2(x-1) - (x-1)^2 - y^2 - 4(x-1)^3 + 4y^2(x-1) + 2(x-1)^2}{\{(x-1)^2 + y^2\}^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{\{(x-1)^2 + y^2\}^2}$$

Por lo tanto $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$
(queda denominador 0)

Si C_1 es la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$ pequeño) y R es la región que es interior a C y exterior a C_1 entonces usamos green para regiones múltiplemente conexas:

$$\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy - \oint_{C_1} P dx + Q dy$$

pero

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ Entonces se reduce a}$$

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_{C_1} P dx + Q dy$$

esto es lo que nos piden calcular, por lo tanto el problema se reduce a calcular

$$\oint_{C_1} P dx + Q dy$$

Debemos parametrizar C_1 : $\vec{\alpha}_1(t) = (1 + a \cos t, a \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$
por lo tanto

$$\oint_{C_1} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\alpha}_1(t)) \cdot \vec{\alpha}'_1(t) dt$$

$$= \left(\frac{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + a \sin t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}, \frac{2a^2 \cos^2 t + 2a^2 \sin^2 t - a \cos t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2 + a \sin t}{a^2}, \frac{2a^2 - a \cos t}{a^2} \right)$$

$$\vec{r}(\vec{r}_1(t)) = \left(\frac{a + \sin t}{a}, \frac{2a - \cos t}{a} \right)$$

$$\vec{r}_1'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a + \sin t}{a}, \frac{2a - \cos t}{a} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\sin t}{a} \right) (-\sin t) + \left(2 - \frac{\cos t}{a} \right) (\cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin t - \frac{\sin^2 t}{a} + 2\cos t - \frac{\cos^2 t}{a} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos t - \sin t - \frac{1}{a} dt = 2\sin t \Big|_0^{2\pi} + \cos t \Big|_0^{2\pi} - t \Big|_0^{2\pi}$$

$$= -2\pi$$

Entonces

$$\int_{C_1} P dx + Q dy = -2\pi //$$

P2 Utilizando la de Green calcular

$$\oint_C \left[\frac{x - yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} \right] dx + \left[\frac{y + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} \right] dy$$

donde C es la frontera del cuadrado de vértices $(2,0)$; $(0,2)$; $(-2,0)$; $(0,-2)$ recorrida en sentido antihorario



$$P = \frac{x - yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} \quad Q = \frac{y + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(-x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2y(x - yx^2 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(3x^2 + y^2)(x^2 + y^2) - 2x(y + x^3 + xy^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)\{(3x^2 + y^2) - (-x^2 - 3y^2)\} - 2x(y + x^3 + xy^2) + 2y(x - yx^2 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)\{3x^2 + y^2 + x^2 + 3y^2\} - 2xy - 2x^4 - 2x^2y^2 + 2xy - 2y^2x^2 - 2y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2) \cdot 4(x^2 + y^2) - 2x^4 - 4x^2y^2 - 2y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{4(x^2 + y^2)^2 - 2\{x^4 + 2x^2y^2 + y^4\}}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{4(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = 4 - 2 = 2$$

Entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$

Sea $C_1: x^2 + y^2 = a^2$ con $a > 0$ pequeño recorrido en sentido antihorario

$$\vec{r}_1(t) = (a \cos t, a \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Consideremos R como la región interior

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) = \oint_C P dx + Q dy - \oint_{C_1} P dx + Q dy$$

$$\Rightarrow \oint_C P dx + Q dy = \oint_{C_1} P dx + Q dy + 2 \cdot \text{Área}(R)$$

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a \cos t - a^2 \cos^2 t \sin t - a^3 \sin^3 t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}, \frac{a \sin t + a^2 \cos^3 t + a^3 \cos t \sin^2 t}{a^2} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a \cos t - a^3 \sin t}{a^2}, \frac{a \sin t + a^3 \cos t}{a^2} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 dt = 2\pi a^2$$

Por lo tanto

Area(R)

$$\oint_C Pdx + Qdy = 2(8 - \pi a^2) + 2\pi a^2$$

$$= 16 //$$

73)

Limitaciones en la aplicación del Teo de Green

Dado

$$F(x,y) = (P,Q) = \frac{(-y\hat{i} + x\hat{j})}{x^2 + y^2}$$

- Calcular su integral de línea sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$
- Calcular $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$, donde D es la región encerrada por la curva D del pto A .
- Discutir si estos resultados están de acuerdo o no con el teo de Green.

a) Parametrizamos el círculo

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$C(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$C'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

cambiando

$$P = \frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t}$$

$$= -\sin t$$

$$Q = \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}$$

$$= \cos t$$

$$dx = -\sin t$$

$$dy = \cos t$$

Debemos calcular

$$\oint P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi //$$

b) Hacemos los cálculos directamente en coord. cartesianas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) - 2y(-y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

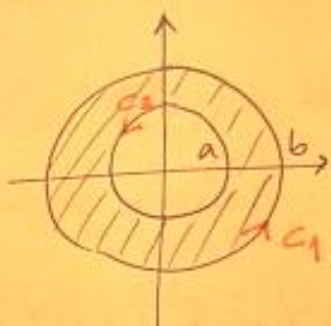
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0 //$$

c) Estos resultados contradicen el teorema de Green
 Sin embargo este no es aplicable a esta región,
 dado que las funciones no tienen derivadas parciales
 continuas en el pto (0,0) que está contenido en la región

[74] Determinar el momento de inercia de una argolla
 homogénea de radio interno a y radio externo b y
 masa M , respecto a uno de sus diámetros



Determinamos el momento de inercia de acuerdo al eje x
 De Física sabemos

$$I_x = \iint_D \rho y^2 dA$$

densidad superficial = ρ cte, por que es homogénea
 Podemos aplicar el teo de Green ya que es múltiplemente
 conexa

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P dx + Q dy - \int_{C_2} P dx + Q dy$$

Basta calcular esto, para ello debemos

encontrar P y Q tales que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = y^2 \quad \text{por ejemplo} \quad Q=0$$

$$P = -\frac{y^3}{3}$$

Nos queda

$$I_x = \iint_D \rho y^2 dA = \rho \left[\int_{C_1} -\frac{y^3}{3} dx + 0 dy - \int_{C_2} -\frac{y^3}{3} dx + 0 dy \right]$$

$$= \rho \left[\int_{c_1} -\frac{y^3}{3} dx + \int_{c_2} \frac{y^3}{3} dx \right] *$$

Parametrizamos las curvas

$$C_1 = (b \cos t, b \sin t)$$

$$C_2 = (a \cos t, a \sin t)$$

$$C_1' = (-b \sin t, b \cos t)$$

$$C_2' = (-a \sin t, a \cos t)$$

Ambas con t entre 0 y 2π

Reemplazando en *

$$I_x = \rho \left[\int_0^{2\pi} -\frac{b^3 \sin^3 t}{3} (-b \sin t) dt + \int_{c_2} \frac{a^3 \sin^3 t}{3} (-a \sin t) dt \right]$$

$$= \rho \cdot \frac{1}{3} \cdot (b^4 - a^4) \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt$$

$$= \rho \frac{1}{3} (b^4 - a^4) \int_0^{2\pi} \sin^2 t (1 - \cos^2 t) dt = \frac{1}{3} \rho (b^4 - a^4) \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \frac{\sin^2 2t}{4}) dt$$

$$= \frac{1}{3} \rho (b^4 - a^4) \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} - \frac{1 - \cos 4t}{8} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \rho (b^4 - a^4) \pi = \frac{1}{4} (b^2 + a^2) \rho \pi (b^2 - a^2)$$

$$\boxed{I_x = \frac{1}{4} (b^2 + a^2) M}$$

$M = \text{masa}$