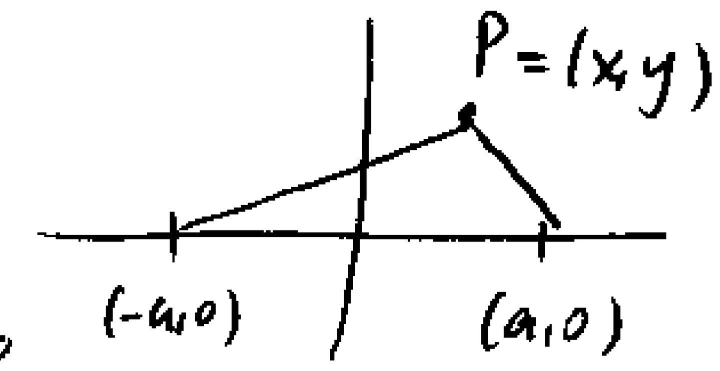
Pauta Aux 1 - CAA - Prim. 10'

P1) a) $P \in$ Lemniscata $\Leftrightarrow d(P,(a,0)) \cdot d(P,(-a,0)) = a^2$



Para evitar el trabajo con raíces, trabajemos con el cuadrado de la expresión, ie:

$$d^2(P,(a,0)) \cdot d^2(P,(-a,0)) = a^4$$

$$[(x-a)^2+y^2] \cdot [(x+a)^2+y^2] = a^4 \Leftrightarrow [(x^2+y^2)-2ax+a^2]\cdot[(x^2+y^2)+2ax+a^2]=a^4$$

Coord. Polares: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \rho^2=x^2+y^2$.

$$\Leftrightarrow [\rho^2-2a\rho\cos\theta+a^2][\rho^2+2a\rho\cos\theta+a^2]=a^4$$

$$\Leftrightarrow [\rho(\rho-2a\cos\theta)+a^2][\rho(\rho+2a\cos\theta)+a^2]=a^4$$

$$\Leftrightarrow \rho^2(\rho^2-4a^2\cos^2\theta)+a^2\rho(\rho+\cancel{2a\cos\theta})+a^2(\rho(\rho-\cancel{2a\cos\theta}))+\cancel{a^4}=\cancel{a^4}$$

$$\Leftrightarrow \rho^4-\rho^2 4a^2\cos^2\theta+2a^2\rho^2=0.$$

$$\Leftrightarrow \rho^4=2\rho^2a^2(2\cos^2\theta-1) \qquad \text{pero } \cos2\theta=\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta$$
$$= \cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1.$$

$$\Leftrightarrow \qquad = 2\rho^2a^2\cos(2\theta) \qquad \text{Si } \rho\neq0$$

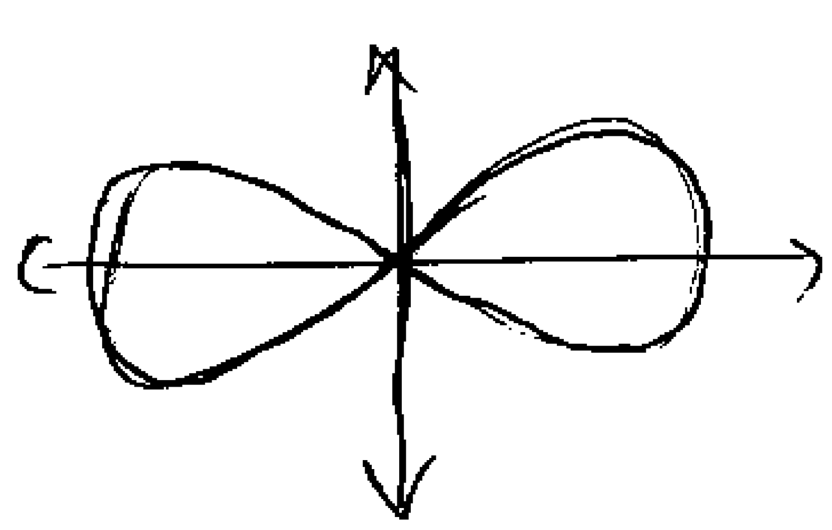
$$\Leftrightarrow \rho^2=2a^2\cos(2\theta)$$, lo deseado.

Obs. lo mostrado vale si $\rho\neq0$. Pero si $\rho=0$ (ie $P=(0,0)$)

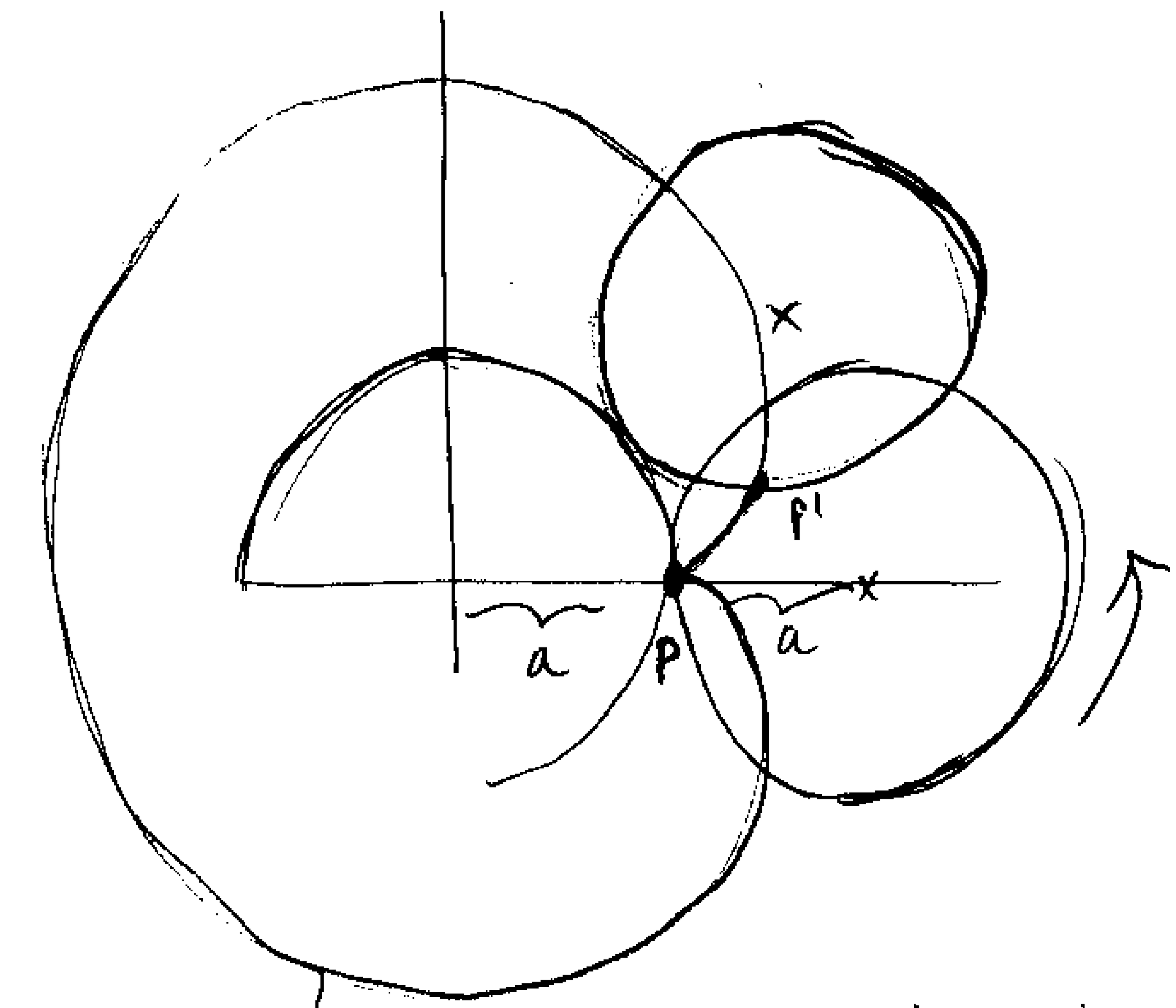
$\Rightarrow d(0,(a,0)) \cdot d(0,(-a,0)) = a\cdot a = a^2$ ie. $P\in$ Lemniscata.

Luego la expresión vale para $\rho=0$ to.

Gráfico



b) idea.

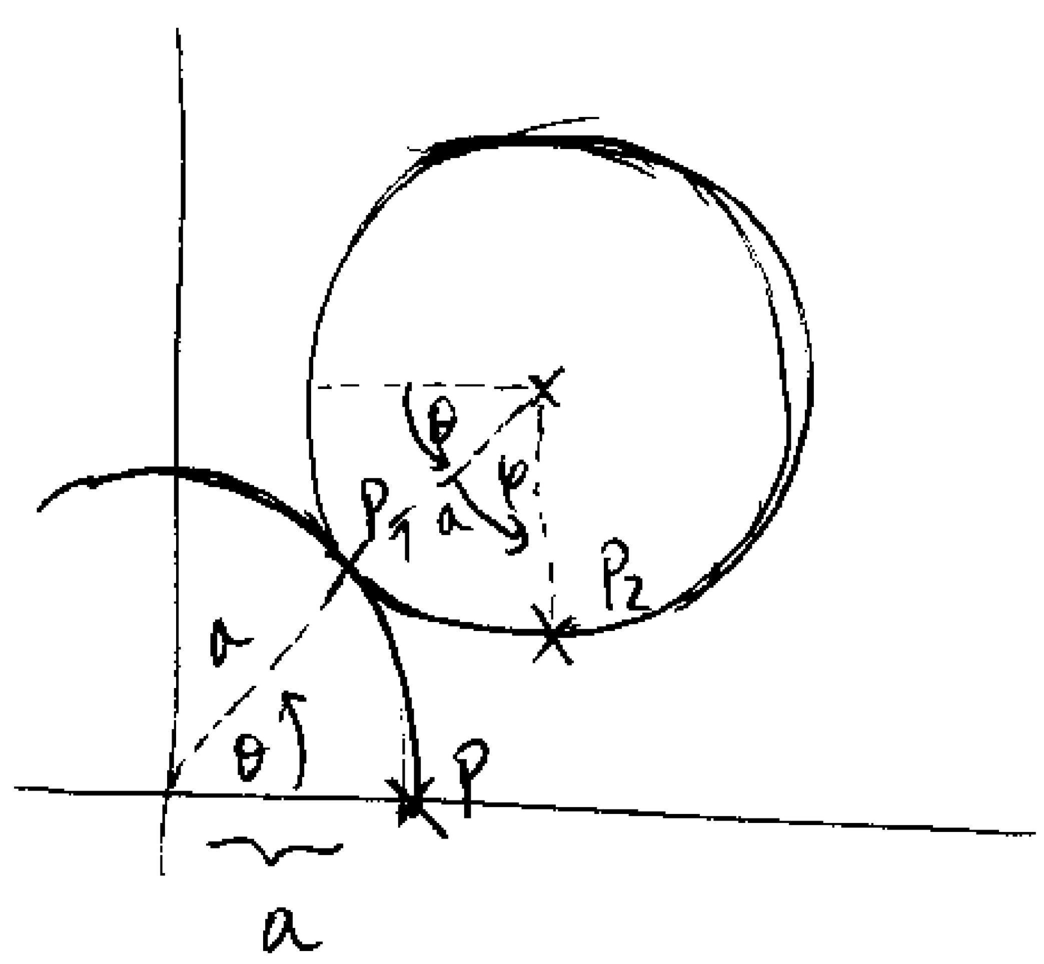


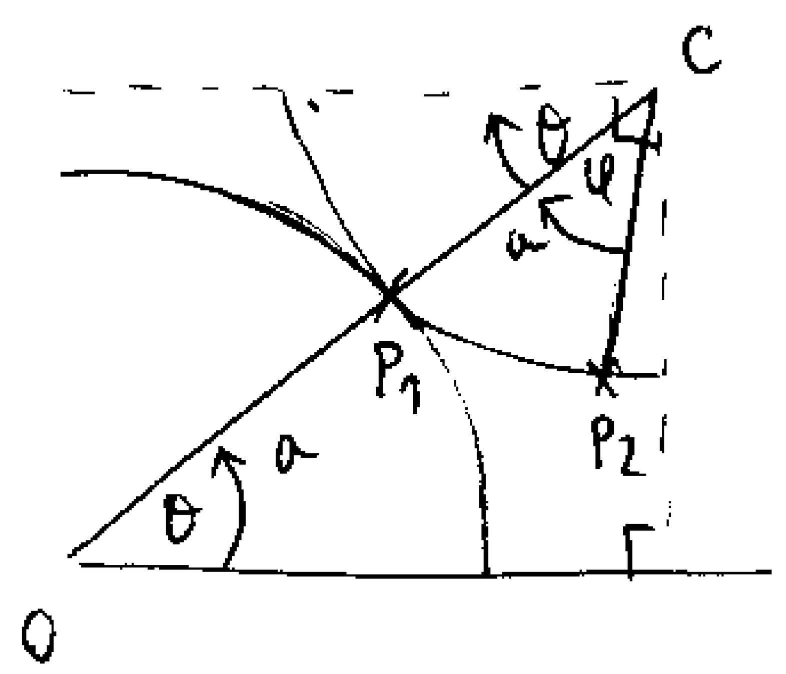
La idea es la siguiente:

Partimos con 2 circ., una de centro $(0,0)$ y la otra de centro $(2a,0)$ (ambas de radio a) queremos estudiar como evoluciona el punto P (el de tangencia), cuando la circ. de la derecha rueda sin resbalar sobre la centrada en $(0,0)$.

curva generada al seguir al punto P, la cardioide.

Para parametrizar consideremos el siguiente esquema:





Si la circunferencia no rodase (simplemente resbalase) el punto P siempre sería tangente) por lo cual al girar un ángulo θ respecto al origen se tendría el nuevo punto P_1. Como la circunferencia rueda sin resbalar, la nueva posición real es P_2 (Es por esto que aparece el ángulo φ, que está asociado al giro)

Debemos pues determinar P_2, claramente hay que usar coord. polares.

$$P_2(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} x(\rho,\theta) \\ y(\rho,\theta) \end{pmatrix} = \left(\vec{OC} + \vec{CP_2} \right)$$

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\,\text{sen}\,\theta \end{pmatrix} \quad \vec{CP} = \begin{pmatrix} -a\cos(\theta+\varphi) \\ -a\,\text{sen}\,(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

Como la circunf. rueda sin resbalar: $a\theta = a\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \varphi}$$

así, $P_2 = \begin{pmatrix} 2a\cos\theta - a\cos(2\theta) \\ 2a\,\text{sen}\,\theta - a\,\text{sen}\,(2\theta) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2a\cos\theta - 2a\cos^2\theta + a \\ 2a\,\text{sen}\,\theta - 2a\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\cos\theta(1-\cos\theta) + a \\ 2a\,\text{sen}\,\theta(1-\cos\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix}$$

Trasladamos el origen a $(a,0)$ (si $\theta = 0$ debo estar en el origen)

$$= \begin{pmatrix} 2a\cos\theta(1-\cos\theta) \\ 2a\,\text{sen}\,\theta(1-\cos\theta) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \rho^2 = x^2+y^2$$

$$= 4a^2\cos^2\theta(1-\cos\theta)^2 + 4a^2\,\text{sen}^2\theta(1-\cos\theta)^2$$

$$= 4a^2(1-\cos\theta)^2[\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta]$$

$$= 4a^2(1-\cos\theta)^2.$$

ie. $\rho(\theta) = 2a(1-\cos\theta)$ ∎

P2| $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ campo C^1 en $\mathbb{R}^3$ tq $\text{div}\,\vec{F} = 0 \iff \exists\,\vec{G}$ clase C^2 tq $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$.

$\Leftarrow$| Veamos que dado que $\exists\,\vec{G}$ tq $\text{rot}\,\vec{G} = \vec{F} \Rightarrow \text{div}\,\vec{F} = 0$.

En efecto: $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(\partial_y G_3 - \partial_z G_2) + \hat{j}(-\partial_x G_3 + \partial_z G_1) + \hat{k}(\partial_x G_2 - \partial_y G_1)$

Notación: $\partial_{x_i} F = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$

Luego: $\text{div}\,\vec{F} = \partial x(\partial_y G_3 - \partial_z G_2) + \partial y(\partial_z G_1 - \partial_x G_3) + \partial z(\partial_x G_2 - \partial_y G_1)$

$$= \partial_x\partial_y G_3 - \partial_x\partial_z G_2 + \partial_y\partial_z G_1 - \partial_y\partial_x G_3 + \partial_z\partial_x G_2 - \partial_z\partial_y G_1$$

Como $\vec{G}$ es C^2 vale el Teo. de Schwarz $\Rightarrow$ puedo cambiar el orden de las deriv.

$$= \cancel{\partial_x\partial_y G_3} - \cancel{\partial_x\partial_z G_2} + \cancel{\partial_y\partial_z G_1} - \cancel{\partial_x\partial_y G_3} + \cancel{\partial_x\partial_z G_2} - \cancel{\partial_y\partial_z G_1}$$

$\equiv 0$. que era lo deseado.

$\Rightarrow$| obs. G_1 debe ser: $G_1(x,y,z) = \int_0^z F_2(x,y,s)\,ds$ $\int_0^y F_3(x,s,z)\,ds$.

Esta parte es simplemente calcular el rotor y usar esta consecuencia del Teo Fund del calculo: $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^x f(u)\,du\right) \underset{\uparrow}{=} \dfrac{d}{dx}\left(F(x) - F(0)\right) = \dfrac{d}{dx}F(x) - \dfrac{d}{dx}\overbrace{F(0)}^{\text{cte.}} \underset{\uparrow}{=} f(x) - 0 = f(x)$

F primit. de f ($\exists$ por TFC) $\quad$ $F' = f$

P3 | a) Demostrar $\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$.

Obs. $\vec{v}$ es un campo de velocidades, i.e. $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Partamos del lado derecho: Calculemos $\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$:

$$(\nabla\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) + \hat{\jmath}(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \hat{k}(\partial_x v_2 - \partial_y v_1).$$
$$= \hat{\imath}(f_1) + \hat{\jmath}(f_2) + \hat{k}(f_3)$$

$$\Rightarrow \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(v_2 f_3 - v_3 f_2) + \hat{\jmath}(v_3 f_1 - v_1 f_3) + \hat{k}(v_1 f_2 - v_2 f_1)$$

$$= \hat{\imath}(v_2\partial_x v_2 - v_2\partial_y v_1 - v_3\partial_z v_1 + v_3\partial_x v_3) + \hat{\jmath}(v_3\partial_y v_3 - v_3\partial_z v_2 - v_1\partial_x v_2 + v_1\partial_y v_1)$$
$$+ \hat{k}(v_1\partial_z v_1 - v_1\partial_x v_3 - v_2\partial_y v_3 + v_2\partial_z v_2)$$

$$\Rightarrow -\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = \hat{\imath}(v_2\partial_y v_1 + v_3\partial_z v_1 - v_2\partial_x v_2 - v_3\partial_x v_3)$$
$$+ \hat{\jmath}(v_3\partial_z v_2 + v_1\partial_x v_2 - v_1\partial_y v_1 - v_3\partial_y v_3)$$
$$+ \hat{k}(v_1\partial_x v_3 + v_2\partial_y v_3 - v_1\partial_z v_1 - v_2\partial_z v_2)$$

al sumarlos se cancelan. Solo queda 1 término

Además: $$\frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2v_1\partial_x v_1 + 2v_2\partial_x v_2 + 2v_3\partial_x v_3 \\ 2v_1\partial_y v_1 + 2v_2\partial_y v_2 + 2v_3\partial_y v_3 \\ 2v_1\partial_z v_1 + 2v_2\partial_z v_2 + 2v_3\partial_z v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum v_i\partial_x v_i \\ \sum v_i\partial_y v_i \\ \sum v_i\partial_z v_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1\partial_x v_1 + v_2\partial_y v_1 + v_3\partial_z v_1 \\ v_1\partial_x v_2 + v_2\partial_y v_2 + v_3\partial_z v_2 \\ v_1\partial_x v_3 + v_2\partial_y v_3 + v_3\partial_z v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}\cdot\begin{pmatrix}\partial_x v_1 \\ \partial_y v_1 \\ \partial_z v_1\end{pmatrix} \\ \vec{v}\cdot\nabla v_2 \\ \vec{v}\cdot\nabla v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{v}\cdot\nabla v_1 \\ \vec{v}\cdot\nabla v_2 \\ \vec{v}\cdot\nabla v_3 \end{pmatrix} = \vec{v}\cdot\begin{pmatrix}\nabla v_1 \\ \nabla v_2 \\ \nabla v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla v_1 \\ \nabla v_2 \\ \nabla v_3\end{pmatrix}\cdot\vec{v} = \nabla\vec{v}\cdot\vec{v}.$$

b) Dado fluido irrot (ie. $\nabla \times \vec{v} = 0$) e incomp. ($\rho \equiv cte$)

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2) + \underset{\uparrow \text{ Presión}}{p} + \rho g z = cte.$$

Sol. Partamos de la ecc de Euler: $\rho \nabla\vec{v}\cdot\vec{v} + \nabla p = -\rho g \hat{k}$

Por a): $\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - \vec{v}\times(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{v}}_{=0}) = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2).$

$$\Rightarrow \rho\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} + \nabla p = -\rho g\hat{k} \Leftrightarrow \frac{\rho}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) + \nabla p = -\rho g \hat{k}$$

Notar que $-\rho g\hat{k} = \nabla(-\rho g z) = -\nabla(\rho g z)$ (la idea es poner todo en ∇ para concluir que $\nabla(\text{algo}) = 0 \Rightarrow \text{algo} \equiv cte$).

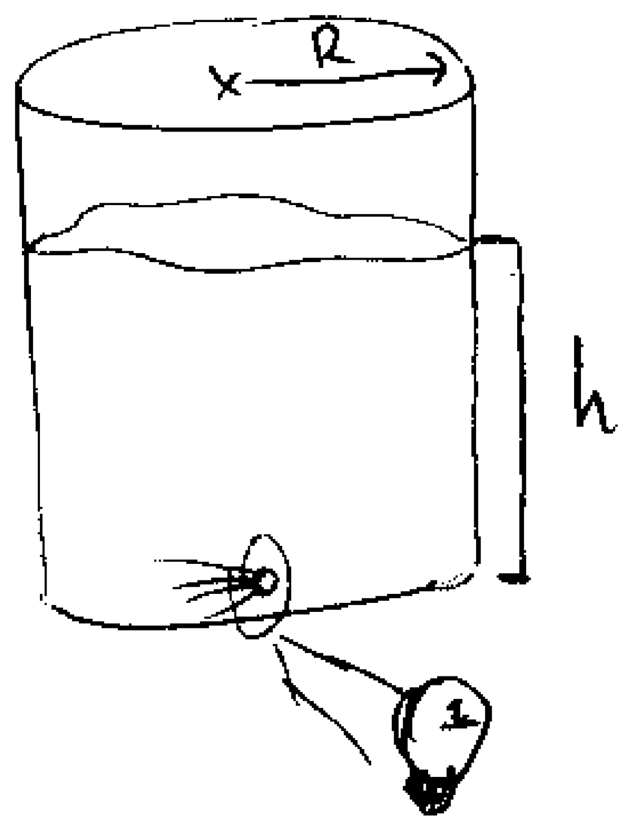
Luego:

$$\frac{\rho}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) + \nabla p = -\nabla(\rho g z),$$ como ρ cte, se puede meter en ∇.

$$\nabla\left(\frac{\rho}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)\right) + \nabla p + \nabla(\rho g z) = 0$$ pero ∇ es lineal

$$\nabla\left(\frac{\rho}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2) + p + \rho g z\right) = 0 \Rightarrow \frac{\rho}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2) + p + \rho g z = cte.$$ ■

c)



flujo irrot. e incompresible $\Rightarrow$ vale b).

flujo estacionario $\Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0$ (ie. la altura la podemos suponer cte)
+ $\varepsilon \ll R$

y el flujo en h es nulo (osea, el fluido esta "quieto") $\Rightarrow v_1^2+v_2^2+v_3^2 = 0$ (en h!)

Sabemos que $\frac{\rho}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2) + p + \rho g z = cte$

impongamos esta condición en $z = h$ y $z = \varepsilon$ (como ε pequeño, lo aprox. a 0)

En $z=h$: $\frac{\rho}{2}(0) + p + \rho g h = cte = p + \rho g h.$

En $z=0$: $\frac{\rho}{2}\underbrace{(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}_{(\text{rapidez})^2} + p + 0 = \frac{\cancel{\rho}}{2}(\text{rapidez})^2 + \cancel{p} = \cancel{p} + \cancel{\rho} g h$

$$(\text{rapidez})^2 = 2gh \Rightarrow \boxed{\text{rapidez salida} = \sqrt{2gh}}$$

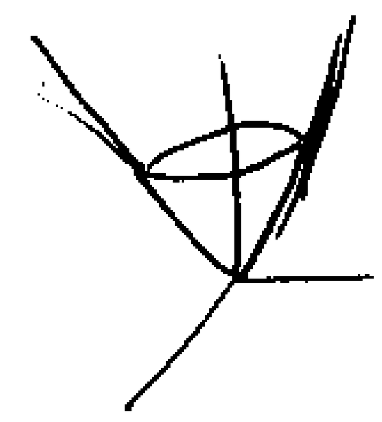
P4 Lo haremos en clase. (Hint: NO hacerlo en coordenadas cartesianas)

P5 Primero veamos qué es Γ:

$\Gamma =$ esfera unitaria (casquete) $\cap$ superficie de ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2}$

En polares $z = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow z = \rho$

Luego la superficie de ecuación $z = \rho$ es el cono (infinito)



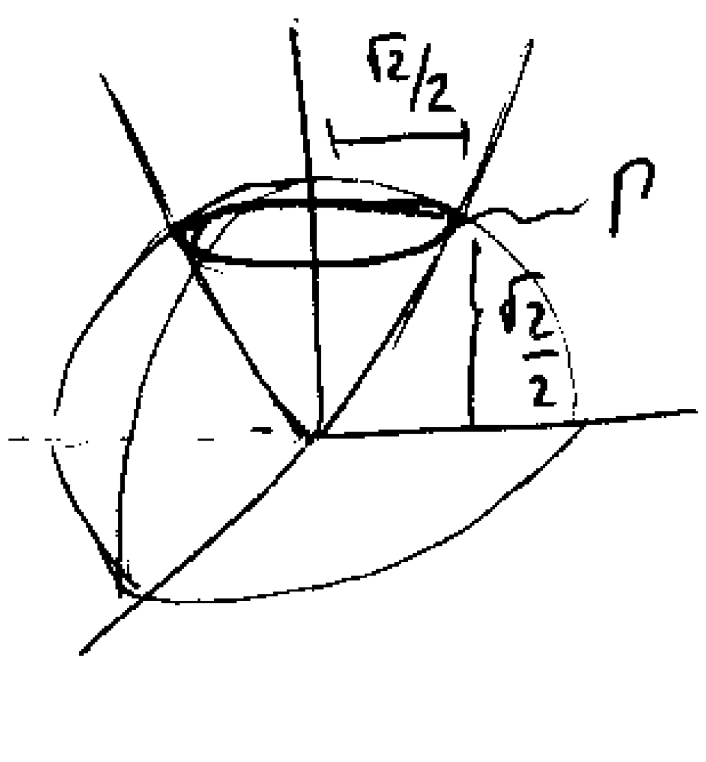
Luego, geométricamente es claro que Γ será una circunferencia, en la altura donde el cono y el casquete se intersectan.

Notemos que: $P = (\rho, \theta, z) \in \Gamma$ si: $\left.\begin{array}{l} P \in \text{esf}: \rho^2 + z^2 = 1. \\ P \in \text{cono}: \rho = z. \end{array}\right\} \Rightarrow 2z^2 = 1 \Rightarrow \boxed{z = \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Luego, Γ es la circunferencia de radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, con centro $\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

así, una parametrización (en cilíndricas) será: $\vec{r}(\rho, \theta, z) = \overset{\rho}{\overset{\shortparallel}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\hat{\rho} + \overset{z}{\overset{\shortparallel}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\hat{k}$

con $\theta \in [0, 2\pi]$



Luego, la circulación (o trabajo) de $\vec{F}$ a través de Γ es: (en general)

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt$$ cuando $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametriza Γ.

En nuestro caso:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot d\theta \underset{\frac{d}{d\theta}\hat{\rho} = \hat{\theta},\ \hat{k} \text{ es cte.}}{=} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta}\right) d\theta.$$

Como $\vec{F}(\rho, \theta, z) = (z - \rho)\frac{\theta^2}{2}\hat{\rho} + z\theta\hat{\theta} + \frac{\theta^2}{2}\rho\hat{k} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}(\theta)) = \cancel{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\,0}\frac{\theta^2}{2}\hat{\rho} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\theta\,\hat{\theta} + \frac{\theta^2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta} + \frac{\theta^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta}\right) d\theta \underset{\hat{\theta}\cdot\hat{k} = 0.}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = \pi^2$$ ∎

Pb 1 Sea el intervalo de tiempo $[a,b]$

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{r}\,'} \cdot dt \quad \text{pero} \quad m\cdot \underbrace{\vec{r}\,''}_{\frac{d^2r}{dt^2}} = \vec{F} \quad \text{(Ley Newton)}$$

$$= \int_a^b m\vec{r}\,''\cdot \vec{r}\,'\,dt \quad \text{pero} \quad \begin{array}{l}\vec{r}\,' = \vec{v}\\ \vec{r}\,'' = \vec{v}\,'\end{array}$$

$$= m\int_a^b \vec{r}\,''\cdot\vec{r}\,'\,dt. \quad \text{pero} \quad \frac{1}{2}(\vec{v}^2)' = \frac{2\vec{v}\cdot\vec{v}\,'}{2} = \vec{v}\cdot\vec{v}\,' = \vec{r}\,'\cdot\vec{r}\,''$$

$$= m\int_a^b \frac{1}{2}(\vec{v}^2)'\,dt = \frac{m\vec{v}^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a)$$

$$(\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \text{rapidez}^2 = v^2(t))$$