Auxiliar 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Martes 17 de Agosto, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Se define la Lemniscata (centrada en el origen) como la curva plana cuyos puntos satisfacen la siguiente propiedad:

$P = (x, y)$ pertenece a la Lemniscata si y solo si $d(P, (a, 0)) \cdot d(P, (-a, 0)) = a^2$.

Pruebe que, en coordenadas polares, es posible parametrizar esta curva como:

$$\rho^2(\theta) = 2a^2 \cos(2\theta)$$

b) Se define la Cardioide como la curva descrita por un punto de una circunferencia que, sin deslizarse, rueda alrededor de otra circunferencia de igual radio. Pruebe que, en coordenadas polares, es posible parametrizar esta curva (de modo tal que, si $\theta = 0$ estamos en el origen) como:

$$\rho(\theta) = 2a(1 - \cos(\theta))$$

Donde a es el radio de las circunferencias que generan la Cardioide.

Pregunta 2. Pruebe que $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $div(\vec{F}) = 0$, si y solo si existe un campo vectorial $\vec{G}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $\vec{F} = rot(\vec{G})$

Indicación: Considere las funciones:

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, s)ds - \int_0^y F_3(x, s, 0)ds$$

$$G_2(x, y, z) = -\int_0^z F_1(x, y, s)ds \quad G_3(x, y, z) = 0$$

Pregunta 3. Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencia de un campo gravitacional:

$$\rho \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} + \nabla p = -\rho g \hat{k}$$

a) Demuestre la identidad:

$$\nabla \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

b) Deduzca que para el caso de un fluido irrotacional e incompresible (i.e. ρ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = cte$$

c) Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura h. En el fondo del estanque se realiza una abertura de radio $\epsilon << R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario e incompresible, demuestre que la rapidez con la que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique las aproximaciones que realice.

Pregunta 4. Calcule el gradiente de:

$$f(x,y,z)=\frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2+y^2+z^2}$$

Pregunta 5. Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar el casquete esférico unitario (centrado en el origen) con la superficie de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Considere Γ recorrida en sentido antihorario. Calcule la circulación a lo largo de Γ del siguiente campo descrito en coordenadas cilíndricas: $\vec{F}(\rho,\theta,z)=(z-\rho)\dfrac{\theta^2}{2}\hat{\rho}+z\theta\hat{\theta}+\dfrac{\theta^2}{2}\rho\hat{k}$

Pregunta 6. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva Γ bajo la acción de un campo de fuerzas $\vec{F}$. Si la rapidez de la partícula en el instante t es $v(t)$ y su energía cinética está definida como $\frac{1}{2}mv^2(t)$. Demuestre que el trabajo realizado por $\vec{F}$ durante cualquier intervalo de tiempo es igual a la variación de la energía cinética en ese intervalo de tiempo. Esto se conoce como el principio del trabajo y la energía.