Capítulo 5

Series de Laurent

Problema 5.1 *Hallar las series de Laurent centradas en $z_0 = 1$ de la función $f(z) = (z-1)/z^2$.*

Solución:

La función f es holomorfa salvo en $z = 0$. Por tanto, si centramos las series en $z_0 = 1$, tendremos dos series de Laurent, una en la bola $B(1;1)$ y otra en la corona $C(1;1,\infty)$.

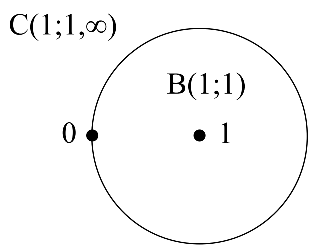

Figura 5.1: Coronas de $f(z) = (z-1)/z^2$

La serie de Laurent en la bola $B(1;1)$ coincide con la serie de Taylor. Usamos la serie de $g(z) = z^{-2}$,

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n, \quad \text{pues } g^{r)}(z) = (-1)^r (r+1)! z^{-2-r} \ ,$$

que también podemos obtener como derivada de la serie de la función $-z^{-1}$, que es una serie geométrica,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \ .$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} m (z-1)^m \\ &= (z-1) - 2(z-1)^2 + 3(z-1)^3 - 4(z-1)^4 + O\big((z-1)^5\big) \ . \end{aligned}$$

Para la otra corona, podemos hacer el cambio $w = 1/(z-1)$ y desarrollar en $w = 0$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{w^{-1}}{(w^{-1}+1)^2} = \frac{w}{(w+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)w^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}m}{(z-1)^m} \\ &= (z-1)^{-1} - 2(z-1)^{-2} + 3(z-1)^{-3} - 4(z-1)^{-4} + O\big((z-1)^{-5}\big) \ , \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la serie de McLaurin de $1/(w+1)^2$ ya la tenemos, tomando $u = w+1$,

$$\frac{1}{(w+1)^2} = \frac{1}{u^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(u-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)w^n \ . \ \square$$

Problema 5.2 *Hallar la serie de Laurent de la función $f(z) = 1/z^2 \sinh z$ en una corona $C(0;0,r)$. ¿Cuál es el valor de r?*

Solución:

La función f es holomorfa salvo en los ceros del denominador, que son $z = in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. El polo $z = 0$ es triple y el resto son simples. Por tanto, la primera corona en la que es holomorfa es $C(0;0,\pi)$.

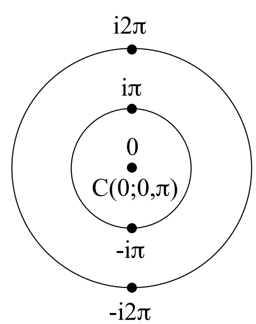

Figura 5.2: Coronas de $f(z) = 1/z^2 \sinh z$

Como $f(z) = g(z)/z^3$, precisamos solamente la serie de McLaurin de $g(z) = z/\sinh z$, que es holomorfa en $B(0;\pi)$. Como es par,

$$g(z) = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + O(z^6) \ , \quad \sinh z = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + O(z^7) \ ,$$

$$z = g(z)\sinh z = a_0 z + \left(a_2 + \frac{a_0}{6}\right) z^3 + \left(a_4 + \frac{a_2}{6} + \frac{a_0}{120}\right) z^5 + O(z^7)$$

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + O(z^6) \ ,$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{7z}{360} + O(z^3) \ . \ \square$$

Problema 5.3 *Hallar las series de Laurent centradas en el origen de la función* $f(z) = 1/(z-1)(z-2)$.

Solución:

La función es holomorfa salvo en sus polos simples, $z = 1$, $z = 2$. Por tanto, tenemos tres coronas en las que la función es holomorfa, $B(0;1)$, $C(0;1,2)$, $C(0;2,\infty)$.

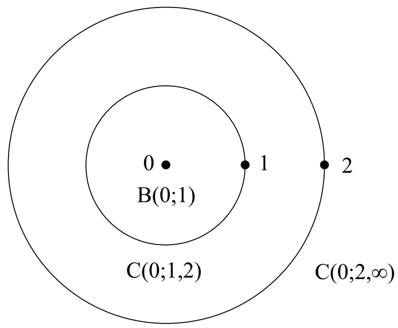

Figura 5.3: Coronas de $f(z) = f(z) = 1/(z-1)(z-2)$

Nos serán muy útiles las series geométricas,

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ , \ \text{si } |z| < 1 \ , \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1/z}{1-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \ , \ \text{si } |z| > 1 \ ,$$

$$\frac{1/2}{z/2-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \ , \ \text{si } |z| < 2 \ , \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1/z}{1-2/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \ , \ \text{si } |z| > 2 \ ,$$

ya que ahora sólo tenemos que restar las series convergentes en cada región,

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \ .$$

En $B(0;1)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} z + \frac{7}{8} z^2 + \frac{15}{16} z^3 + \frac{31}{32} z^4 + O(z^5) \ .$$

En $C(0;1,2)$,

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \ .$$

En $C(0;2,\infty)$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}-1}{z^n} = z^{-2} + 3z^{-3} + 7z^{-4} + O(z^{-5}) \ . \ \square$$

Problema 5.4 *Hallar las dos primeras series de Laurent de la función* $f(z) = \operatorname{cosec} z$.

Solución:

La función $f(z) = 1/\sin z$ es holomorfa salvo en $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Luego f es analítica en infinitas coronas de la forma $C(0; n\pi, (n+1)\pi)$.

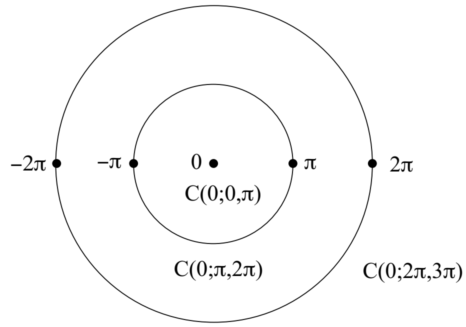

Figura 5.4: Coronas de $f(z) = \operatorname{cosec} z$

En $C(0; 0, \pi)$, tenemos que la función $g(z) = z/\sin z$ es holomorfa y par y tiene serie de McLaurin, $g(z) = \sum a_n z^n$,

$$\begin{aligned} z &= g(z)\sin z = \left(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4\right)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}\right) + O(z^7) \\ &= a_0 z + \left(a_2 - \frac{a_0}{6}\right) z^3 + \left(a_4 - \frac{a_2}{6} + \frac{a_0}{120}\right) z^5 + O(z^7)\ , \end{aligned}$$

$$g(z) = 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + O(z^6)\ , \qquad f(z) = \frac{g(z)}{z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + O(z^5)\ .$$

En la corona $C(0; \pi, 2\pi)$, la situación es más complicada. Tratamos de separar la parte principal de la función de la parte holomorfa, buscando una función h,

$$h(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{a}{z} - \frac{b}{z-\pi} - \frac{c}{z+\pi}\ ,$$

que sea holomorfa en $z = 0, \pm\pi$, para poder calcular su serie de McLaurin.

Como $\sin z = z + O(z^3)$, $a = 1$. Como $\sin z = \pi - z + O\big((z-\pi)^3\big)$, $b = -1$. Del mismo modo, $c = -1$. Por tanto, simplificando y usando las series ya conocidas,

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} - \frac{1/\pi}{1 - z/\pi} + \frac{1/\pi}{1 + z/\pi} = \left(\frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360}\right) \\ &- \left(\frac{1}{\pi} + \frac{z}{\pi^2} + \frac{z^2}{\pi^3} + \frac{z^3}{\pi^4} + \frac{z^4}{\pi^5}\right) + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{z}{\pi^2} + \frac{z^2}{\pi^3} - \frac{z^3}{\pi^4} + \frac{z^4}{\pi^5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right) z + \left(\frac{7}{360} - \frac{2}{\pi^4}\right) z^3 + O(z^5)\ , \end{aligned}$$

obtenemos una serie convergente en $B(0; 2\pi)$. Así pues,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= h(z) + \frac{1}{z} + \frac{1/\pi}{1 - z/\pi} - \frac{1/\pi}{1 + z/\pi} = h(z) + \frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2 - \pi^2} \\ &= -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}} - \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right) z + \left(\frac{7}{360} - \frac{2}{\pi^4}\right) z^3 + O(z^5)\ , \end{aligned}$$

para lo cual hemos expresado, para $|z| > \pi$, la serie geométrica,

$$\frac{z}{z^2-\pi^2} = \frac{1/z}{1-\pi^2/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{\pi^2}{z^3} + \frac{\pi^4}{z^5} + O(z^{-7})\ .\ \square$$

Problema 5.5 *Calcular las integrales de las siguientes funciones:*

1. $1/(z^2-1)$ *a lo largo de la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.*
2. $1/(z^2+z-1)$ *a lo largo de la circunferencia de radio* $1/2$ *centrada en el origen.*
3. $1/(z^4+1)$ *a lo largo de la semicircunferencia superior de radio 2 centrada en el origen.*
4. $(1+z)/(1-\cos z)$ *a lo largo de la circunferencia de radio 7 centrada en el origen.*
5. $\sin z/(1-\cos z)$ *a lo largo de la circunferencia de radio 8 centrada en el origen.*
6. $\sin^2 z/(1-\cos z)$ *a lo largo de la circunferencia de radio* 5π *centrada en el origen.*

Solución:

1. La función $f(z) = 1/(z^2-1)$ es holomorfa salvo en $z = \pm 1$, que son polos simples, ambos rodeados por la circunferencia, Γ, de radio 2 centrada en el origen. Calculamos ambos residuos,

$$\mathrm{Res}\ (f, \pm 1) = \lim_{z\to\pm 1} \frac{z \mp 1}{z^2-1} = \lim_{z\to\pm 1} \frac{1}{2z} = \pm\frac{1}{2}\ ,$$

y aplicamos el teorema de los residuos para calcular la integral,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = i2\pi \mathrm{Res}\ (f,1) + i2\pi \mathrm{Res}\ (f,-1) = 0\ .\ \square$$

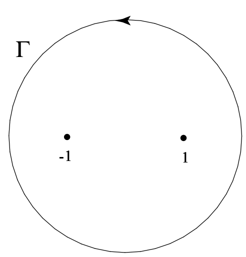

Figura 5.5: Curva Γ y polos de $f(z) = 1/(z^2-1)$

2. La función $1/(z^2+z-1)$ es holomorfa salvo en $z = (-1 \pm \sqrt{5})/2$, que son polos simples, ninguno de ellos rodeado por la circunferencia, Γ, de radio $1/2$ centrada en el origen. Por tanto, la integral es nula. $\square$

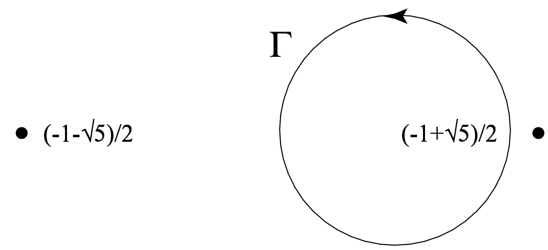

Figura 5.6: Curva Γ y polos de $f(z) = 1/(z^2 + z - 1)$

3. La función $f(z) = 1/(z^4+1)$ es holomorfa salvo en $z = e^{i\pi/4}$, $e^{i3\pi/4}$, $e^{i5\pi/4}$, $e^{i7\pi/4}$, que son polos simples, de los cuales sólo los dos primeros, z_0, z_1, están rodeados por la semicircunferencia superior de radio 2 centrada en el origen.

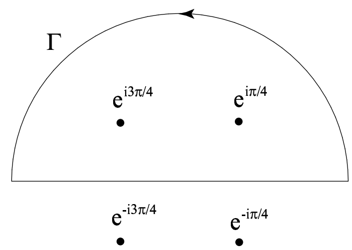

Figura 5.7: Curva Γ y polos de $f(z) = 1/(z^4 + 1)$

Calculamos ambos residuos,

$$\text{Res } (f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z^4 + 1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{4z^3} = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4} \ , \ \text{Res } (f, z_1) = \frac{e^{-i\pi/4}}{4} \ ,$$

y aplicamos el teorema de los residuos para calcular la integral,

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = i2\pi \left(\text{Res } (f, z_0) + \text{Res } (f, z_1)\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \ . \ \square$$

4. La función $f(z) = (1 + z)/(1 - \cos z)$ es holomorfa salvo en $z = n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, que son polos dobles, ya que $1 - \cos z = z^2/2 + O(z^4)$. De ellos, sólo $0, \pm 2\pi$, están rodeados por la circunferencia de radio 7 centrada en el origen.

   Calculamos los tres residuos,

$$f(z) = \frac{1 + z}{1 - \cos z} = \frac{1 + z}{z^2/2 + O(z^4)} = \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + O(1) \ , \ \text{Res } (f, 0) = 2 \ ,$$

$$\begin{aligned} f(z) \quad &= \quad \frac{1 + z}{1 - \cos(z - 2\pi)} = \frac{1 + 2\pi + (z - 2\pi)}{(z - 2\pi)^2/2 + O((z - 2\pi)^4)} \\ &= \quad \frac{2 + 4\pi}{(z - 2\pi)^2} + \frac{2}{z - 2\pi} + O(1) \ , \quad \text{Res } (f, 2\pi) = 2 \ , \end{aligned}$$

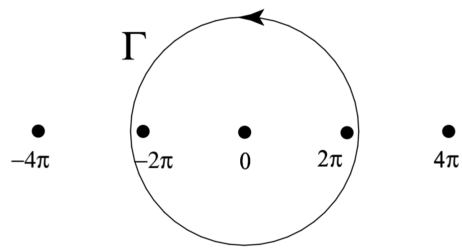

Figura 5.8: Curva Γ y polos de $f(z) = (1+z)/(1-\cos z)$

e igualmente $\text{Res}\,(f,-2\pi) = 2$. Aplicamos el teorema de los residuos para calcular la integral,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = i2\pi\,(\text{Res}\,(f,0) + \text{Res}\,(f,2\pi) + \text{Res}\,(f,-2\pi)) = i12\pi\ .\ \square$$

5. La función $f(z) = \sin z/(1-\cos z)$ es holomorfa salvo en $z = n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. De ellos, sólo $0, \pm 2\pi$, están rodeados por la circunferencia de radio 8 centrada en el origen. Como $\sin z = z + O(z^3)$ y $1 - \cos z = z^2/2 + O(z^4)$, los polos son simples. Los tres residuos son iguales, ya que la función es periódica,

$$f(z) = \frac{\sin z}{1-\cos z} = \frac{z+O(z^3)}{z^2/2+O(z^4)} = \frac{2}{z} + O(z)\ ,\ \text{Res}\,(f,0) = 2\ .$$

Aplicamos el teorema de los residuos para calcular la integral,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = i2\pi\,(\text{Res}\,(f,0) + \text{Res}\,(f,2\pi) + \text{Res}\,(f,-2\pi)) = i12\pi\ .\ \square$$

6. La función $f(z) = \sin^2 z/(1-\cos z)$ presenta singularidades evitables en $z = n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ya que,

$$f(z) = \frac{1-\cos^2 z}{1-\cos z} = 1 + \cos z\ ,$$

por lo que se puede extender a una función entera y su integral a lo largo de cualquier curva cerrada es nula. $\square$

Problema 5.6 *Calcular las siguientes integrales:*

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\sin t}$.
2. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{2\cos t+3}$.
3. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+a^2-2a\cos t}$, $1 \neq a > 0$.
4. $\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(nt - \sin t)\,dt$, $n \geq 1$.
5. $\int_0^{\pi} \sin^{2n} t\,dt$.

Solución:

Trasladamos las integrales a la circunferencia, Γ, centrada en el origen de radio unidad, mediante la transformación $z = e^{it}$, $dz = ie^{it}dt$.

1.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\sin t} = \int_\Gamma \frac{2\,dz}{i4z - z^2 + 1} = i2\pi \mathrm{Res}\left(\frac{2}{i4z-z^2+1}, z_0\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\ ,$$

ya que el integrando tiene polos simples en $z = i(2 \pm \sqrt{3})$ y sólo $z_0 = i(2-\sqrt{3})$ está en el interior de la circunferencia,

$$\mathrm{Res}\left(\frac{2}{i4z-z^2+1}, z_0\right) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)2}{i4z-z^2+1} = \lim_{z\to z_0} \frac{2}{i4-2z} = \frac{1}{i\sqrt{3}}\ . \ \square$$

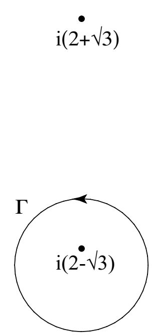

Figura 5.9: Circunferencia unidad y polos de $f(z) = 2/(i4z - z^2 + 1)$

2. Como el coseno es simétrico respecto a π, la integral es la mitad de la integral en el intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{2\cos t + 3} = -\frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+1+3z} = \pi \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1+3z}, z_0\right) = \frac{\sqrt{5}\pi}{5}\ ,$$

ya que el integrando tiene polos simples en $z = (-3 \pm \sqrt{5})/2$ y sólo $z_0 = (-3+\sqrt{5})/2$ está en el interior de la circunferencia,

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1+3z}, z_0\right) = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z^2+1+3z} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{2z+3} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ . \ \square$$

3.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+a^2-2a\cos t} = -i\int_\Gamma \frac{dz}{(1+a^2)z - a(z^2+1)}\ .$$

El integrando es una función holomorfa salvo en los polos simples $z = a, 1/a$, de los cuales sólo uno está en el interior de la circunferencia. Calculamos los residuos, para $f(z) = 1/\big((1+a^2)z - a(z^2+1)\big)$,

$$\mathrm{Res}\ (f, a) = \lim_{z\to a} \frac{z-a}{(1+a^2)z - a(z^2+1)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(1+a^2) - 2az} = \frac{1}{1-a^2}\ ,$$

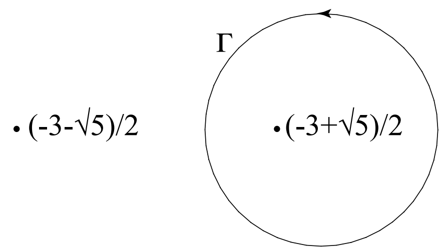

Figura 5.10: Circunferencia unidad y polos de $f(z) = 1/(z^2 + 1 + 3z)$

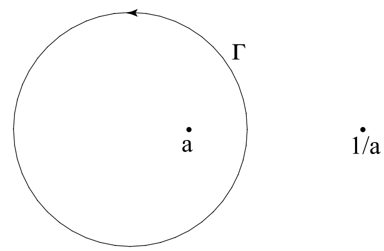

Figura 5.11: Circunferencia unidad y polos de $f(z) = 1/((1 + a^2)z - a(z^2 + 1))$

$$\text{Res}\ (f, 1/a) = \lim_{z\to 1/a} \frac{z - 1/a}{(1 + a^2)z - a(z^2 + 1)} = \frac{1}{a^2 - 1}\ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + a^2 - 2a\cos t} = \frac{2\pi}{|a^2 - 1|}\ .\ \square$$

4.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(nt - \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\frac{e^{i(nt-\sin t)} + e^{i(\sin t - nt)}}{2}\, dt \\ &= -\frac{i}{2}\int_\Gamma \left(e^{1/z}z^{n-1} + e^z z^{-n-1}\right) dz \\ &= \pi\text{Res}\left(e^{1/z}z^{n-1}, 0\right) + \pi\text{Res}\left(e^z z^{-n-1}, 0\right) = \frac{2\pi}{n!}\ , \end{aligned}$$

donde los residuos los obtenemos de los desarrollos,

$$e^{1/z}z^{n-1} = z^{n-1} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-1} + O(z^{-2})\ , \quad \text{Res}\left(e^{1/z}z^{n-1}, 0\right) = \frac{1}{n!}\ ,$$

$$e^z z^{-n-1} = z^{-n-1} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-1} + O(1)\ , \quad \text{Res}\left(e^z z^{-n-1}, 0\right) = \frac{1}{n!}\ .\ \square$$

5. Como el integrando es simétrico respecto de π, la integral es la mitad de la integral en el intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \sin^{2n} t\, dt = -\frac{i}{2}\int_\Gamma \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^{2n}\frac{dz}{z} = -\frac{i(-1)^n}{2^{2n+1}}\int_\Gamma \frac{(z^2 - 1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz \\ &= \frac{(-1)^n\pi}{2^{2n}}\text{Res}\left(\frac{(z^2 - 1)^{2n}}{z^{2n+1}}, 0\right) = \frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n}}\frac{2n}{n}\frac{2n - 1}{n - 1}\cdots\frac{n + 1}{1}\ . \end{aligned}$$

Pues para calcular el residuo nos interesa el coeficiente del término de grado $2n$ del numerador,

$$(z^2-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix} z^{2k}(-1)^{2n-k} = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} (-1)^n z^{2n} + \cdots . \ \square$$

Problema 5.7 *Calcular las integrales de las siguientes funciones a lo largo de la recta real:*

1. $1/(x^4+1)$.

2. $1/(x^6+1)$.

3. $1/(x^2-2x+4)$.

4. $1/(x^2+a^2)$.

5. $1/(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2$.

Solución:

Todas ellas se pueden reducir a integrales en el dominio complejo, bien en el semiplano superior, bien en el inferior, ya que el límite de $zf(z)$ cuando z tiende a infinito es cero para todas ellas y no tienen polos en el eje real.

1. La función $f(z) = 1/(z^4+1)$ tiene polos en $z = e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}$, de los cuales los dos primeros están en el semiplano superior. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = i2\pi \left\{ \mathrm{Res}\left(f, e^{i\pi/4}\right) + \mathrm{Res}\left(f, e^{i3\pi/4}\right) \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ ,$$

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{i\pi/4}\right) = \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{z-e^{i\pi/4}}{z^4+1} = \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \ ,$$

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{i3\pi/4}\right) = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} \ . \ \square$$

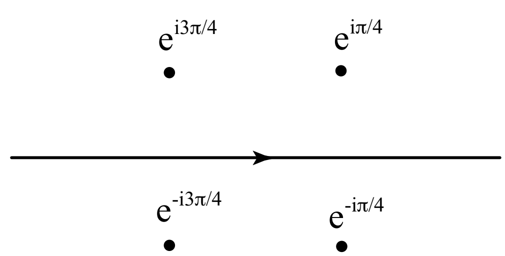

Figura 5.12: Polos de $f(z) = 1/(z^4+1)$

2. La función $f(z) = 1/(z^6 + 1)$ tiene polos en $z = e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}$ en el semiplano superior. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= i2\pi \sum_{n=0}^{2} \text{Res}\left(f, e^{i(2n+1)\pi/6}\right) \\
&= i2\pi \left(\frac{\sqrt{3}-i}{12} - \frac{i}{6} - \frac{\sqrt{3}+i}{12} \right) = \frac{2}{3}\pi \ ,
\end{aligned}$$

$$\text{Res}\left(f, e^{in\pi/6}\right) = \lim_{z\to e^{in\pi/6}} \frac{z - e^{in\pi/6}}{z^6+1} = \lim_{z\to e^{in\pi/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{e^{-in5\pi/6}}{6} \ . \ \square$$

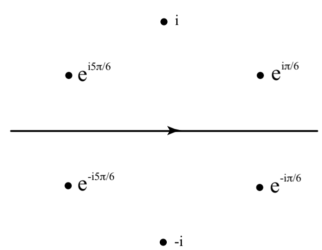

Figura 5.13: Polos de $f(z) = 1/(z^6 + 1)$

3. La función $1/(z^2 - 2z + 4)$ tiene un único polo simple, $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$, en el semiplano superior. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = i2\pi \text{Res}\,(f, z_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \ ,$$

$$\text{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{z^2 - 2z + 4} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{2z-2} = \frac{1}{i2\sqrt{3}} \ . \ \square$$

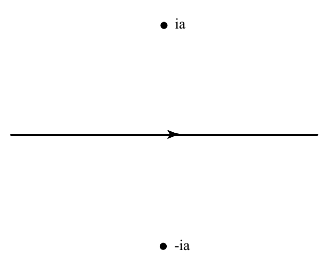

Figura 5.14: Polos de $f(z) = 1/(z^2 + a^2)$

4. La función $1/(z^2 + a^2)$ tiene un único polo simple, $z_0 = ia$, en el semiplano superior si $a > 0$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = i2\pi \text{Res}\,(f, z_0) = \frac{\pi}{a} \ ,$$

$$\text{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z^2 + a^2} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{2z} = \frac{1}{i2a}. \ \square$$

5. La función $1/(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)^2$ tiene un polo simple, $z_0 = ia$, y un polo doble, $z_1 = ib$, en el semiplano superior si $a \neq b > 0$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = i2\pi \sum_{n=0}^{1} \text{Res}\,(f, z_n) = \frac{\pi}{a(a^2 - b^2)^2} + \frac{a^2 - 3b^2}{2(a^2 - b^2)^2 b^3}\pi\ ,$$

$$\text{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(z + ia)(z^2 + b^2)^2} = \frac{1}{i2a(a^2 - b^2)^2}\ .$$

$$\begin{aligned} \text{Res}\,(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}(z - z_1)^2 f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z + ib)^2} \\ &= \lim_{z \to z_1} \frac{-2z(z + ib) - 2(z^2 + a^2)}{(z^2 + a^2)^2 (z + ib)^3} = \frac{1}{i4} \frac{a^2 - 3b^2}{(a^2 - b^2)^2 b^3}\ .\ \square \end{aligned}$$

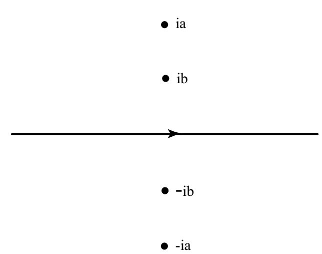

Figura 5.15: Polos de $f(z) = 1/(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)^2$

En el caso en el que $a = b$, el polo es triple, $z_0 = ia$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = i2\pi \text{Res}\,(f, z_0) = \frac{3\pi}{8a^5}\ ,$$

$$\begin{aligned} \text{Res}\,(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} (z - z_0)^3 f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z + ia)^3} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{12}{(z + ia)^5} = \frac{3}{i8a^5}\ .\ \square \end{aligned}$$

Problema 5.8 *Calcular las integrales de las siguientes funciones a lo largo de la recta real:*

1. $e^{ikx}/(x^2 + a^2)$, $a > 0$
2. $\cos kx/(x^2 + 1)$.
3. $\sin kx/(x^2 + 1)$.
4. $e^{ikx}/(x + ia)$, $a > 0$.
5. $x^3 \sin x/(x^2 + 1)^2$.

6. $\cos x/(x^2+4)(x^2+1)$.

Solución:

Todas ellas se pueden reducir a integrales en el dominio complejo de funciones de la forma $e^{ikx}f(x)$, ya que el límite de $f(z)$ cuando z tiende a infinito es cero para todas ellas y no tienen polos en el eje real.

1. Para $k>0$: la función $f(z)=1/(z^2+a^2)$ tiene un único polo simple en $z_0=ia$ en el semiplano superior si $a>0$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx = i2\pi \mathrm{Res}\left(f(z)e^{ikz}, z_0\right) = \frac{\pi}{a}e^{-ka}\ ,$$

$$\mathrm{Res}\left(f(z)e^{ikz}, z_0\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{z^2+a^2}e^{ikz} = \lim_{z\to z_0}\frac{e^{ikz}}{z+ia} = \frac{e^{-ka}}{i2a}\ .$$

Para $k=-il<0$ podemos usar el residuo en $z_1=-ia$, pero es más cómodo usar las propiedades de simetría del integrando,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ilx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{ily}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ily}\,dy = \frac{\pi}{a}e^{ka}\ ,$$

haciendo el cambio de variable $y=-x$. Juntando ambos resultados,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx = \frac{\pi}{a}e^{-|k|a}\ . \ \square$$

2. Esta integral es la parte real de la anterior, luego vale $\pi e^{-|k|a}/a$. $\square$

3. El integrando es una función impar, luego la integral es nula. $\square$

4. Para $k>0$, no hay polos en el semiplano inferior, así que la integral es nula.

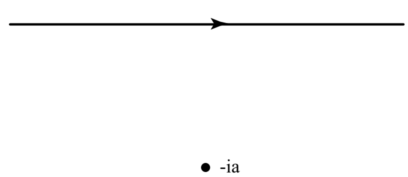

Figura 5.16: Polos de $f(z)=e^{ikz}/(z+ia)$

Para $k<0$, la función $f(z)=1/(z+ia)$, tiene un polo simple, $z_0=-ia$, en el semiplano inferior. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx = -i2\pi \mathrm{Res}\left(f(z)e^{ikz}, z+ia\right) = -i2\pi e^{ka}\ . \ \square$$

5. La integral es la parte imaginaria de la integral de Fourier de una función, que extendida al dominio complejo, $f(z) = z^3/(z^2+1)^2$, tiene un único polo doble, $z_0 = i$, en el semiplano superior. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx = i2\pi \mathrm{Res}\,\left(f(z)e^{iz}, i\right) = \frac{i\pi}{2e}\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\,dx = \frac{\pi}{2e}\ ,$$

$$\mathrm{Res}\,\left(f(z)e^{iz}, i\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{(z-i)^2 z^3}{(z^2+1)^2}e^{iz} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2} = \frac{1}{4e}\ .\ \square$$

6. La integral es la parte real de la integral de Fourier de una función, que extendida al dominio complejo, $f(z) = 1/(z^2+4)(z^2+1)$, tiene dos polos simples, $z_0 = i$, $z_1 = i2$, en el semiplano superior. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx = i2\pi\sum_{n=0}^{1}\mathrm{Res}\,\left(f(z)e^{iz}, z_n\right) = \frac{\pi}{3e} - \frac{\pi}{6e^2}\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\,dx = \frac{\pi}{3e} - \frac{\pi}{6e^2}\ ,$$

$$\mathrm{Res}\,\left(f(z)e^{iz}, z_0\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+1)} = \lim_{z\to z_0}\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z+i)} = \frac{1}{i6e}\ ,$$

$$\mathrm{Res}\,\left(f(z)e^{iz}, z_1\right) = \lim_{z\to z_1}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+i2)} = \frac{i}{12e^2}\ .\ \square$$

Problema 5.9 *Calcular* $\int_2^3 \frac{\sqrt{5x-x^2-6}}{x^2}\,dx$.

Solución:

La integral propuesta es de la forma,

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{5x-x^2-6}}{x^2}\,dx = \int_2^3 f(x)\sqrt{|x-2|\cdot|x-3|}\,dx\ ,$$

con $f(z) = 1/z^2$.

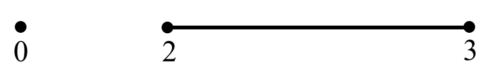

Figura 5.17: Puntos singulares del integrando

La función $g(z) = f(z)\left(\sqrt{z-2}\right)_\pi\left(\sqrt{z-3}\right)_\pi$ tiene un polo doble en $z_0 = 0$, fuera del intervalo de integración,

$$\mathrm{Res}\,(g,0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\sqrt{z-2}\right)_\pi\left(\sqrt{z-3}\right)_\pi = \frac{\left(\sqrt{-3}\right)_\pi}{2\left(\sqrt{-2}\right)_\pi} + \frac{\left(\sqrt{-2}\right)_\pi}{2\left(\sqrt{-3}\right)_\pi} = \frac{5\sqrt{6}}{12}\ .$$

El infinito es polo simple, ya que,

$$\frac{g(w^{-1})}{w^2} = \frac{1}{w}\left(\sqrt{1-5w+6w^2}\right)_\pi \ ,$$

$$\text{Res }(g,\infty) = -\lim_{w\to 0}\left(\sqrt{1-5w+6w^2}\right)_\pi = -1 \ ,$$

Con lo cual, ya estamos en condiciones de evaluar la integral,

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{5x-x^2-6}}{x^2}\,dx = \pi\text{Res }(g,\infty) + \pi\text{Res }(g,0) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\pi - \pi \ . \ \square$$

Problema 5.10 *Calcular* $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx$.

Solución:

Esta integral se reduce a una en el dominio complejo. Para ello, tenemos que calcular los polos fuera del semieje positivo de la función $g(z) = (\ln z)^2_{2\pi}/(z^2+1)$, que son dos polos simples, $z = \pm i$,

$$\text{Res }(g,i) = \lim_{z\to i}\frac{(\ln z)^2_{2\pi}}{z+i} = -\frac{\pi^2/4}{i2} \ , \quad \text{Res }(g,-i) = \lim_{z\to -i}\frac{(\ln z)^2_{2\pi}}{z-i} = \frac{9\pi^2/4}{i2} \ ,$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx = -\frac{\Re\left(\text{Res }(g,i) + \text{Res }(g,-i)\right)}{2} = \Re(i\pi^2/2) = 0 \ . \ \square$$

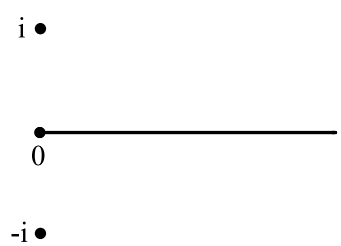

Figura 5.18: Puntos singulares del integrando

La integral por residuos se va a la parte imaginaria,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{\Im\left(\text{Res }(g,i) + \text{Res }(g,-i)\right)}{2\pi} = \Im(i\pi/2) = \frac{\pi}{2} \ ,$$

que ya era conocida.

Problema 5.11 *Calcular* $\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Solución:

Esta integral se reduce a una en el dominio complejo. Para ello, tenemos que calcular los polos fuera del semieje positivo de la función $g(z) = (\ln z)^2_{2\pi}/(z^2+1)^2$, que son dos polos dobles, $z = \pm i$,

$$\text{Res }(g,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{(\ln z)^2_{2\pi}}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i} \frac{2(\ln z)_{2\pi}}{z(z+i)^2} - \frac{2(\ln z)^2_{2\pi}}{(z+i)^3} = -\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi^2}{16} \ ,$$

$$\text{Res }(g,-i) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\frac{(\ln z)^2_{2\pi}}{(z-i)^2} = \lim_{z\to -i} \frac{2(\ln z)_{2\pi}}{z(z-i)^2} - \frac{2(\ln z)^2_{2\pi}}{(z-i)^3} = \frac{3\pi}{4} - i\frac{9\pi^2}{16} \ ,$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\, dx = -\frac{\Re\left(\text{Res }(g,i) + \text{Res }(g,-i)\right)}{2} = -\Re\left(\frac{\pi - i\pi^2}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} \ . \ \square$$

Problema 5.12 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$*, usando el valor principal de* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{i2x}}{x^2}\, dx$*.*

Solución:

Calculamos el valor principal

$$I := ⨍_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{i2x}}{x^2}\, dx = i\pi \text{Res }(f,0) = 2\pi \ ,$$

teniendo en cuenta que, como $z=0$ es un polo simple de $f(z) = (1-e^{i2z})/z^2$, por ser $1-e^{i2z} = -i2z + O(z^2)$,

$$\text{Res }(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{i2z}}{z} = -i2 \ .$$

La integral que buscamos está relacionada con la parte real de esta integral,

$$\Re(I) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^2}\, dx = 2\pi \ .$$

Esta integral es convergente en el origen, ya que $1-\cos 2x = 2\sin^2 x = O(x^2)$. Es una singularidad evitable. Por tanto, como el integrando es par,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \ . \ \square$$

Problema 5.13 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx$*, usando el valor principal de* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{3e^{ix}-e^{i3x}-2}{x^3}\, dx$*.*

Solución:

Calculamos el valor principal

$$I := ⨍_{-\infty}^\infty \frac{3e^{ix}-e^{i3x}-2}{x^3}\, dx = i\pi \text{Res }(f,0) = i3\pi \ ,$$

teniendo en cuenta que, como $z=0$ es un polo simple de $f(z)=(3e^{iz}-e^{i3z}-2)/z^3$, por ser $3e^{iz}-e^{i3z}-2=3z^2+O(z^3)$,

$$\mathrm{Res}\ (f,0)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{3e^{iz}-e^{i3z}-2}{z^2}=3\ .$$

La integral que buscamos está relacionada con la parte imaginaria de esta integral,

$$\Im(I)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}\,dx=3\pi\ .$$

Esta integral es convergente en el origen, ya que $3\sin x-\sin 3x=4\sin^3 x=O(x^3)$. Es una singularidad evitable. Por tanto, como el integrando es par,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}\,dx=\frac{3}{8}\pi\ .\ \Box$$

Problema 5.14 *Calcular la suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2+1)^2$.

Solución:

La función $f(z)=1/(z^2+1)^2$ tiene polos dobles en $z=\pm i$ y cumple los requisitos para aplicar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=-\mathrm{Res}\ (\pi\cot\pi z f(z),i)-\mathrm{Res}\ (\pi\cot\pi z f(z),-i)\ ,$$

para lo cual calculamos los residuos,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\ (\pi\cot\pi z f(z),\pm i) &= \lim_{z\to\pm i}\frac{d}{dz}\frac{\pi\cot\pi z}{(z\mp i)^2}=\lim_{z\to\pm i}-\frac{\pi^2\,\mathrm{cosec}^2\,\pi z}{(z\mp i)^2}-\frac{2\pi\cot\pi z}{(z\mp i)^3}\\ &= -\frac{\pi\coth\pi+\pi^2\mathrm{cosech}^2\pi}{4}\ ,\end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=2\sum_{n=1}^{\infty} f(n)+1=\frac{\pi\coth\pi+\pi^2\mathrm{cosech}^2\pi}{2}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\frac{\pi\coth\pi+\pi^2\mathrm{cosech}^2\pi}{4}-\frac{1}{2}\ ,$$

teniendo en cuenta que f es una función par. $\Box$