Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Lectura Obligatoria 1 *

Prof: Álvaro Hernández
Auxs: Francisco Collarte, Felipe Maldonado

5 de octubre de 2010

Teorema. La serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ define una función holomorfa en su disco de convergencia $D(0, R)$ $R > 0$. La derivada de f es también una serie de potencias que se obtiene derivando término a término la serie de f, es decir:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Además f' tiene el mismo radio de convergencia de f.
Demostración: En clase probamos la afirmación sobre el radio de convergencia de f'. Definamos $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ y mostremos que $f' = g$. Supongamos $|z_0| < r < R$ y escribamos $f(z) = S_N(z) + E_N(z)$, donde

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \quad \text{y} \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n.$$

Así, si h se toma tal que $|z_0 + h| < r$ se tiene entonces que

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) = \left(\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0)\right) + (S'_N(z_0) - g(z_0)) + \left(\frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h}\right)$$

Veamos el último término de esta suma que llamaremos E. Sabemos que para todo par de complejos $a, b \in \mathbb{C}$ se tiene $(a^n - b^n) = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k$, usando esto con $a = z_0 + h$ y $b = z_0$ tenemos que

$$|E| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} (z_0 + h)^{n-k} z_0^k \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1},$$

puesto que $|z_0| < r$ y $|z_0 + h| < r$. La expresión anterior es la cola de una serie convergente, ya que g converge absolutamente sobre $|z| < R$. Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ podemos podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $N > N_1$ entonces $|E| < \varepsilon/3$. Por otro lado existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $N > N_2$

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon/3,$$

puesto que $\lim_{N\to\infty} S'_N(z_0) = g(z_0)$. Luego, fijemos a $N > \max N_1, N_2$, luego, podemos encontrar $\delta > 0$ de tal manera que si $|h| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S'_n(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Finalmente, para $|h| < \delta$ se tiene

$$\left|\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0)\right| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

lo que prueba el teorema. ■

*erratas a ahernandez@dim.uchile.cl