MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Álvaro Hernández. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Francisco Collarte.

Auxiliar 7

5 de octubre de 2010

P1. *Radios de convergencia*

Determine el radio de convergencia de la serie $\sum a_n z^n$, donde

- $a_n = n!$
- $a_n = \frac{n^2}{4^n+3n}$
- $a_n = (n!)^3/(3n)!$ Hint: la fórmula de Stirling dice $n! \sim cn^{n+1/2}e^{-n}$ para algún $c > 0$.

P2. *Convergencia de series de potencias*

Pruebe lo siguiente

1. La serie de potencias $\sum z^n/n^2$ converge para todo punto del círculo unitario.
2. La serie de potencias $\sum z^n/n$ converge para todo punto del círculo unitario excepto para $z = 1$.
3. Sea $S(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, con $a_k = \begin{cases} 2 & si \quad k \text{ es par} \\ 1 & si \quad k \text{ es impar} \end{cases}$

   Determine su radio de convergencia R, y pruebe que para el caso $|z| \geq R$ la serie diverge, y que para el caso $|z| < R$ la serie converge y se tiene la fórmula $S(z) = \dfrac{2+z}{1-z^2}$

P3.

1. Sea $f(z) = \dfrac{-log(1-z^2)}{2}$, calcular su serie de potencias en torno a $z_0 = 0$
2. Considere la serie $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$
   - Pruebe que su radio de convergencia R es igual a 1.
   - Pruebe que existe un conjunto S denso en $\partial D = \{|z| = 1\}$ tal que si $z_0 = e^{i\theta_0} \in S$, entonces $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta_0}) = \infty$ (esto significa que f no puede ser extendida continuamente a ningún punto de ∂D)

P4. *Ecuaciones complejas*

1. Resolver las siguientes ecuaciones:
   - $e^z = i$
   - $\sin z = 1$

2. Determinar el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$|\frac{z-i}{z+3-2i}| = k$$

$\boxed{\text{P5.}}$ *La función infinitamente floja (Propuesto)*
Considere la función f definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Pruebe que f es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 1$, sin embargo no tiene una expansión en serie de potencias centrada en el origen que converja.