AUXILIAR # 6

P0.

- (a) Sea $f(x + iy) = \sqrt{|x||y|}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Muestre que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen, sin embargo no es holomorfa en el origen.
- (b) Sea f holomorfa en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pruebe que en cualquiera de los siguientes casos:
- $\Re(f)$ constante.
 - $\Im(f)$ constante.
 - $|f|$ constante.
- se tiene que f es constante en Ω

P1.

- (a) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.
- (b) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Indicación: considere $|f|^2$.
- (c) Sean $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω como subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces $u + iv$ es constante.

P2. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

- (a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
- (b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.
- (c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.
- (d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2 , se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v,$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω . Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω . Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω .

P3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Verifique que de tenerse estas condiciones entonces

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}, \quad z = re^{i\theta}.$$

P4. (Propuesto) Demuestre que no es posible dotar a $\mathbb{C}$ un orden, es decir, no se puede encontrar una relación $\succ$ entre dos complejos y que cumpla las siguientes propiedades:

- Ley de Tricotomía: dados $z, w \in \mathbb{C}$ sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera: $z \succ w$, $w \succ z$ o $z = w$
- $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \succ z_2 \Rightarrow z_1 + z_3 \succ z_2 + z_3$.
- $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \succ 0$ y $z_2 \succ z_3 \Rightarrow z_2 z_1 \succ z_3 z_1$.

P5. (Propuesto) Demuestre que una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{C}$ converge en $\mathbb{B}$ si y sólo si las sucesiones reales $\{\operatorname{Re}z_n\}$ e $\{\operatorname{Im}z_n\}$ convergen en $\mathbb{R}$. Además $\{z_n\}$ converge a lo que tiene que converger.