

Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Repaso 1 *

Prof: Álvaro Hernández

Auxs: Francisco Collarte, Felipe Maldonado

9 de septiembre de 2010

P.1. C1. 2006-2 Mat. Apl. Prof: Felipe Álvarez.

Sea F el campo vectorial dado por $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Dada una superficie regular S orientable y un vector fijo $v_0 \in \mathbb{R}^3$, demuestre que

$$\int_S v_0 \cdot \hat{n} \, dA = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\partial S} (v_0 \times F) \cdot dr & \text{si } \partial S \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde ∂S es el borde de S (si existe) regular a trozos y tiene orientación compatible a S . Explique.

P.2. C1. 1999-2 Mat. Apl. Prof: Felipe Álvarez.

Sea el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se define $n(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} F \cdot dr$

2.1 Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$.

- I. $\phi(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
- II. $\phi(t) = (r \cos t, -r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
- III. $\phi(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 4\pi]$.
- IV. $\Gamma = \partial Q$, con $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

2.2 Dada Γ curva cerrada en torno al origen $(0, 0)$, se le llama a $n(\Gamma)$ el *número de enrollamiento antihorario* de Γ . Justifique esta terminología.

2.3 ¿Es F un campo conservativo? Justifique su respuesta.

2.4 Considere la curva Γ parametrizada por $\phi(t) = (2r - r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, y) = \nabla g(x, y)$ en un rectángulo R que contiene a la curva Γ . Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo. Hint: Busque g de la forma $g(x, y) = f(y/x)$ y recuerde que $\arctan'(t) = 1/(1 + t^2)$.

2.5 ¿Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes 2.1 y 2.4? Justifique.

*erratas a ahernandez@dim.uchile.cl

P.3.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto y acotado, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar clase $C(\Omega)$. Dada $S \subset \Omega$ superficie regular se define la *integral de f sobre S* mediante

$$\int_S f dA = \int_S f(y) dA(y) := \int_U f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv.$$

donde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S definida sobre un abierto U .

Sea u un campo escalar de clase $u \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$. Dado $x \in \Omega$ definamos $B_\rho := \overline{B(x, \rho)}$ con $B(x, \rho)$ la bola (en $\mathbb{R}^3$) de centro en x y de radio $0 < \rho \leq R$. Supongamos que $B_\rho \subset \Omega$ para todo ρ y definamos

$$I(\rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B_\rho} u dA$$

3.1 Muestre que $\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\rho) = u(x)$.

3.2 Sea n la normal unitaria exterior a ∂B_ρ y $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$. Muestre que

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dA = \int_{B_\rho} \Delta u dV.$$

3.3 Muestre que

$$I'(\rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{B_\rho} \Delta u dV.$$

3.4 Suponer que u es armónica en Ω , i.e. $\Delta u = 0$ en Ω . Usando lo anterior muestre que

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dA.$$

(Esto dice que si u es armónica entonces el valor $u(x)$ puede expresarse como el promedio de los valores de u sobre el borde de cualquier bola centrada en x)

3.5 Suponer que u es armónica en Ω y que tiene un máximo local en x . Muestre que u debe ser constante en alguna bola con centro en x . Hacer lo mismo si se cambia “máximo local” por “mínimo local”.

3.6 Suponga ahora que el máximo o mínimo en x es absoluto, esto es $u(y) \leq u(x)$ para todo $y \in \Omega$ ó $u(y) \geq u(x)$ para todo $y \in \Omega$. Demuestre que si Ω es conexo entonces u es constante sobre todo Ω . Este resultado se llama *principio fuerte del máximo o mínimo*. Notar que esto dice que si u es armónica entonces

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} u &= \max_{\partial\Omega} u, & \text{y} \\ \min_{\overline{\Omega}} u &= \min_{\partial\Omega} u, \end{aligned}$$

es decir el máximo y el mínimo de funciones armónicas en un dominio acotado se alcanza en la frontera del dominio.

3.7 Se dice que u es *subarmónica* en Ω si $\Delta u \geq 0$ en Ω , análogamente se dice que u es *superarmónica* en Ω si $-u$ es subarmónica en Ω . Deducir un principio fuerte del máximo para funciones subarmónicas y un principio fuerte del mínimo para funciones superarmónicas.

3.8 Sean $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Entonces existe una única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$