AUXILIAR # 4

P1. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (coordenadas esféricas) para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

(a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.
(b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico $r = a$ $(a > 0)$ orientado según la normal exterior.
(c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ (recuerde que $\Delta U = \text{div } \nabla U$).
(d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces:

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint\limits_{\Omega} U dV.$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

P2. Considere el campo vectorial dado por $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}$.

(a) Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y pruebe que div $\vec{F} = 0$.
(b) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción de casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = 1$ y $z = -1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje Σ y calcule el flujo a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera.

P3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto conexo, acotado, de frontera $S = \partial\Omega$ regular y orientable. Sean f y g funciones continuas conocidas. Demuestre que si u_1 y u_2 son funciones de clase C^2 tales que:

$$\begin{array}{rcl} \Delta u_i(x) & = & f(x) \quad \forall x \in \Omega, i = 1,2 \\ \nabla u_i \cdot \hat{n}(x) & = & g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, i = 1,2 \end{array}$$

Y, además, $\exists x_0 \in \Omega$ tal que $u_1(x_0) = u_2(x_0)$. Entonces $u_1(x) = u_2(x) \forall x \in \Omega$.

Indicación: Puede ser útil probar el siguiente resultado:

$$\iint_{\partial\Omega} \psi\nabla\phi \cdot \hat{n} dA = \iiint_{\Omega} \psi\Delta\phi + \nabla\psi\nabla\phi dV$$

P4. Considere la curva Γ dada por la intersección entre las curvas $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 4 + y^2$, y considere

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = (\rho \sin(\theta) + z)\hat{\rho} + \frac{z \sin(\theta)}{\rho}\hat{\theta} + (z - \rho\cos(\theta))\hat{k}$$

Calcule $\oint\limits_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r}$.

P5. Dado $h > 0$, sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2}$$

de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= z \\ z(0) &= h \end{aligned}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

(a) Bosqueje la curva.

(b) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z^2}\right).$$

Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ_0.