CALCULO AVANZADO Y APLICACIONES, MA2002
GUIA DE PROBLEMAS, 2010

Profesor: Álvaro Hernández
Auxiliares: Francisco Collarte, Felipe Maldonado.

Integrales de Trabajo

P.1. Pruebe que los siguientes campos vectoriales son conservativos:

(i) $F(x, y, z) = (\pi, e, e^{\pi})$
(ii) $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$
(iii) $F(x, y, z) = (3y + 2z^2, 3x, 4xz)$

P.2. Dentro de los siguientes campos vectoriales, sólo uno de ellos es no conservativo, determine cuál de ellos es. Para esto, calcule la integral de trabajo sobre la circunferencia unitaria centrada en el origen, o bien, encuentre un potencial.

- $F(x, y) = (3x^2 + 2xy^2 + y, 2x^2y + x + 3y^2)$
- $F(x, y) = (y\cos(x) + \sin(y) + 1, \sin(x) + x\cos(y) + 1)$
- $F(x, y) = (e^x \sin(y) + 1, e^x \cos(y) + 1)$
- $F(x, y) = (2xy + 1, x^2 + 4y)$
- $F(x, y) = (x^2, xy^2)$
- $F(x, y) = (15x^4 + 6x^2y^3 + y, 6x^3y^2 + x + 15y^4)$

P.3. Calcular la integral de línea del campo:

$$F(x, y, z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right)$$

a lo largo de las curvas parametrizadas por:

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{\sinh(5t^4)}{\sinh(5)}, t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 2t, \frac{\ln(1 + 6t^8)}{\ln(7)}\right) \quad \text{con}\, t \in [0, 1]$$

$$\vec{\mu}(t) = \left(\ln(t^2 - t + 1), \sin(t^3 + 3t^2 - 4t), \frac{\cosh(t^5 - t) - 1)}{(t^2 + t + 1)^{\frac{4}{7}}}\right) \quad \text{con}\, t \in [0, 1]$$

P.4. Considere la curva Γ que se mueve sobre la superficie de la esfera centrada en el origen de radio a, y tal que la relación entre sus ángulos en coordenadas esféricas es $\phi = \frac{\theta}{2}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$. Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$. Calcule el trabajo realizado por el campo F a lo largo de la curva Γ.

P.5 (Control 1, 2002).

(a) Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y - z)\hat{\imath} + (z - x)\hat{\jmath} + (x - y)\hat{k}$.
Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{\sigma}(\varphi) = (a\sin(\varphi)\cos(\alpha),\, a\sin(\varphi)\sin(\alpha),\, a\cos(\varphi))\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

donde $a > 0$ y $0 < \alpha < \pi$.
Compruebe que dicha curva está en la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $y = x\tan(\alpha)$, y demuestre que el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ a lo largo de ella es:

$$\pm 2\pi a^2(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))$$

interprete el signo.

(b) Sea $\vec{F}(x,y) = cxy\hat{\imath} + x^6y^2\hat{\jmath}$, con $c > 0$, un campo de fuerzas que actúa sobre una partícula, que debe moverse desde el origen del sistema de coordenadas hasta la recta $x = 1$ a lo largo de la curva: $y = ax^b$ donde $a, b > 0$. Encuentre un valor de a (en términos de c) de modo que el trabajo realizado por esta fuerza sea independiente de b.

Integrales de Flujo y Superficies

P.1. Considerar la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por:

$$\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta), \quad 0 \le r \le 1 \text{ y } 0 \le \theta \le 4\pi$$

(a) Bosqueje la superficie
(b) Hallar la normal unitaria a la superficie
(c) Hallar la ecuación del plano tangente a Σ en el punto $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$
(d) Si $\vec{r_0} \in \Sigma$, mostrar que el segmento de recta horizontal que va del eje z a $\vec{r_0}$ está contenido en Σ y el plano tangente a la superficie en $\vec{r_0}$.

P.2. Sea S la superficie definida por $z = x\phi(y/x)$ donde ϕ esuna función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie S pasan por el origen de los ejes de coordenadas. Indicación: calcule el plano tangente a partir de la normal.

P.3. Dada la superficie definida por: $z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0$

(a) Bosquejar su gráfico. Dibuje las curvas que se producen en las intersecciones: $x = a, y = b, z = c$
(b) Calcule el plano tangente en el punto $(1, 1, 2)$.
(c) Calcule el centro de masa suponiendo densidad constante.

P.4 (Examen 2002). Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = (z + a)^2$ con $z \in [0, h]$ donde a y h son constantes positivas fijas. Dibuje la superficie S.
Considere el campo vectorial $\vec{F}(\rho,\theta,z) = (1/\rho)\,\hat{\rho} + (\rho^2 + z^2)\,\hat{\theta} + z\,\hat{k}$, donde ρ, θ y z son las variables en coordenadas cilíndricas. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S, primero por definición y luego haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

P.5 (C1 2002). Considere aquella curva Γ sobre la superficie del paraboloide de ecuación: $x^2 + y^2 - z = 0$, que al ser descrita en coordenadas cilíndricas, las variables $\rho \ge 0$ y $\theta \in [0, \infty[$ satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho, \quad \text{con condiciones iniciales} \quad \rho(0) = 1\,, \quad \frac{d\rho}{d\theta}(0) = -1.$$

(i) Obtenga una parametrización para la curva en términos de θ y bosquéjela.

(ii) Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (z(1+xz)e^{xz+y},\, xze^{xz+y},\, x(1+xz)e^{xz+y})$, considere una partícula confinada a moverse *a través de la curva* Γ. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$, al llevar dicha partícula desde la altura $z = 1$ hasta $z = z_0$ con $0 < z_0 \le 1$.
¿Cuál será el trabajo para llevarla hasta el origen?.

(iii) Imagine que la curva es un alambre cuya densidad lineal de masa es $\rho(x,y,z) = \sqrt{1+2z}$. Calcule la masa total y las coordenadas del centro de masa del alambre.

Indicación: Sepa que, para $a > 0$:
$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x)\,dx = \frac{a}{1+a^2} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = \frac{1}{1+a^2}.$$

P.6 (C1 2001). Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ y la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2Ry$, con $4R^2 \geq z \geq 0$.

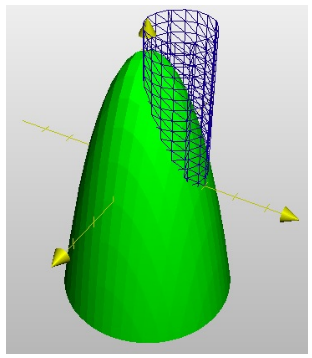

FIGURA 1.

(i) Parametrice la superficie de la porción del cilindro que queda fuera del paraboloide (zona oscurecida en la Figura 1). Indicación: Use coordenadas cilíndricas con origen en (0,0,0).
(ii) Calcule el área de dicha porción del cilindro.

P.7 (C1 2001). Sea S una superficie definida implícitamente por $F(x,y,z) = 0$, para (x,y) en un región $D = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathcal{R}^2$. Suponiendo F de clase $\mathcal{C}^1$, pruebe que

$$\int\int_S \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dA = \int_a^b \int_c^d \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dy$$

Indicaciones:

(i) Observe que una parametización regular de S es:
$$\vec{\sigma} : D \longrightarrow \mathcal{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (x, y, z(x,y))$$
donde $z = z(x,y)$ queda definida implícitamente por la ecuación $F(x,y,z) = 0$.

(ii) Note que si define
$$g(x,y) = F(x,y,z(x,y)),$$
entonces $g \equiv 0$, al igual que sus derivadas.

P.8 (EX 2001).

(a) Sea $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\hat{\imath} + F_2(x,y,z)\hat{\jmath} + F_3(x,y,z)\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Suponga que $\vec{F}$ es el rotor de algún campo vectorial y que $F_3(x,y,z) = \vec{F}\cdot\hat{k} = 1$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del semicasquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$, orientado según la normal superior.

(b) Considere una cañería cilíndrica de longitud L y de radios a y b, la cual conduce un líquido a temperatura T_1, mayor que la temperatura exterior T_0. Se desea determinar el régimen estacionario de la temperatura; para ello suponga que la conductividad térmica k es constante y suponga además simetría cilíndrica, es decir, $T(\rho,\,\theta,\,z) = T(\rho)$.

(i) Para $\rho \in [a, b]$ considere el flujo de calor

$$\Phi(\rho) := \iint_{\Sigma(\rho)} k\,\nabla T \cdot d\vec{S}$$

a través del manto del cilindro de radio ρ y longitud L ($\Sigma(\rho)$).
Usando el Teorema de la divergencia, demuestre que $\Phi(\rho)$ es constante e igual a $\Phi(b)$.

(ii) Deduzca que $\rho\,\frac{\partial T}{\partial \rho}$ es constante y encuentre una expresión analítica para $T(\rho)$ en función de T_0, T_1, a, b.

(iii) Pruebe que $\Phi(b) = 2\pi L k(T_0 - T_1)/\ln(b/a)$.

Indicación: Recuerde que la ecuación del calor para el caso en que la conductividad k es constante está dada por:

$$c\,\varrho\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\triangle T$$

con lo que para el caso estacionario, se trata de la ecuación de Laplace:

$$k\,\triangle T = 0$$

Divergencia y Rotor

P.0. Pruebe las siguientes identidades:

(a) $rot(\nabla\phi) = 0$
(b) $div(rot(\vec{F}) = 0$
(c) $div(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot rot(\vec{F}) - \vec{F} \cdot rot(\vec{G})$
(d) $div(\nabla f \times \nabla g) = 0$
(e) $rot(\phi\vec{F}) = \phi rot(\vec{F}) + \nabla\phi \times \vec{F}$

P.1. Considere el volumen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ definido por las inecuaciones:

$$\begin{cases} |z| \leq 2 - x^2 - y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la región Ω.
(b) Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\vec{F} = \rho\hat{\rho}$ (en coordenadas cilíndricas) a través de $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior.

P.2.

(i) Calcule $\oint_\Gamma (y^2, z^2, x^2) \cdot d\vec{r}$ donde Γ es el trángulo de vértices $(0,0,0)$, $(0,a,0)$ y $(0,0,a)$, recorridos en este orden, y compruebe el teorema de Stokes.
(ii) Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Considere el campo definido por $\vec{F}(x,y,z) = (z\sin(x) - y^3, z\cos(y) + x^3, \cos(xy))$. Calcule $I = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$

P.3.

(a) Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x - y\cos(z), y - x, z - e^y)$ a través de la superficie del toro de eje de simetría z, centrado en el origen y de radios R_0 y r_0 ($R_0 > r_0$).

(b) Calcular la integral de superficie $\iint_\Sigma \nabla\phi \cdot d\hat{S}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior y ϕ es el campo escalar $\phi(x,y,z) = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2$.

P.4. Calcule el flujo definido por el campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^y \operatorname{sen}(y) + xy^2 z, e^x \cos(z) + x^2 yz, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$. Indicación: Calcule el flujo total que sale del cilindro (incluyendo las tapas y usando el teorema de la divergencia). Calcule el flujo a través de las tapas directamente.

P.5.

(a) Calcular $I = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ siendo $\vec{F}$ el campo vectorial definido por

$$\vec{F} = (x-z)\hat{\imath} + (x^2 + yz)\hat{\jmath} - 3xy\hat{k}$$

y S es la superficie del cono $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ (orientada exteriormente) que queda sobre el plano yz ($x \geq 0$) y en el primer octante. Indicación: Utilice el teorema de Stokes.

(b) Un sólido situado en el primer octante está acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $y^2 + z^2 = a^2$. Si $\vec{F}$ es el campo vectorial definido por $\vec{F} = 2yz\hat{\imath} + (x + 3y - 2)\hat{\jmath} - (x^2 + z)\hat{k}$, entonces pruebe que el valor de la integral de flujo $\displaystyle\iint_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ tomada sobre la superficie del sólido y orientada según la normal exterior es $\frac{a^2}{4}(4a + \pi)$.

P.6. En todo lo que sigue Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$, con frontera $\partial\Omega$, regular por trozos.

(a) Demuestre la siguiente identidad de Green: Dados $f \in C^2(\Omega)$ y $g \in C^1(\Omega)$, se tiene:

$$\iint_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dV$$

(b) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Se quiere probar que si esta ecuación admite solución entonces ésta es única. Suponga que existen dos soluciones u_1 y u_2, y definamos $w = u_1 - u_2$. Pruebe que w es identicamente nula. **Indicación:** Use la parte (a).

P.7 (C2, 2001). Considere el campo vectorial

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(3x^2 y - 3z + e^x \sin(z)\right)\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} + (e^x\cos(z) - 3x)\,\hat{k}$$

(i) Calcule $rot(\vec{f}\,)$

(i) Considere la curva Γ parametrizada por

$$\Gamma : \quad \vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcule

$$\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción de cilindro de la Figura 1.

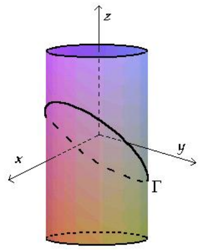

FIGURA 2.

P.8 (C2, 2002).

(a) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto, conexo y acotado de frontera $S = \partial\Omega$ regular y orientable por trazos. Sean f y g funciones continuas conocidas. Demuestre que si u_1 y u_2, funciones de clase $\mathcal{C}^2$, satisfacen las propiedades siguientes:

$$\left\{\begin{array}{lll} \operatorname{div}(\nabla u_i)(x) = f(x) & \forall x \in \Omega & i = 1,2 \\ \nabla u_i \cdot \hat{n}(x) = g(x) & \forall x \in S & i = 1,2 \\ \exists x_0 \in \Omega;\ u_1(x_0) = u_2(x_0), & & \end{array}\right.$$

entonces son iguales en Ω.
Indicación: Es útil probar la siguiente identidad del tipo Green (Consecuencia del Teo. de la Divergencia). Puede serle útil usar el problema 1:
Dados φ y ψ de clase $\mathcal{C}^2$ se tiene:

$$\iint_{\partial\Omega} \psi \nabla\varphi \cdot \hat{n} dA = \iiint_{\Omega} (\psi \operatorname{div}\nabla\varphi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi)\ dv$$

y piense en probar que $u_1 - u_2 = 0$

(b) Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = (h - z)$ con $h > 0$ constante y sea Π el plano tangente a la superficie del paraboloide en el punto $(0, \sqrt{h}, 0)$. Demuestre que el area de la porción del plano contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ es: $\pi a^2 \sqrt{1 + 4h}$.

P.9 (C2, 2002). Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = (z + c(z)a)^2$ con $z \in [-h, h]$ donde a y h son constantes positivas fijas y:

$$c(z) = \left\{\begin{array}{ll} signo(z) & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{array}\right.$$

Considere el campo vectorial $\vec{F} = (k_1/\rho)\,\hat{\rho} + k_2 e^{-z^2}\,\hat{\theta} + k_3 z\,\hat{k}$, donde ρ, θ y z son las variables en coordenadas cilíndricas y k_1, k_2, k_3 son constantes dadas. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S, primero por definición y luego haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado. Comente.

P.10 (C2, 2002). Considere el toro de radio mayor R y radio menor a, donde $R > a > 0$ son constantes conocidas. Sea Σ la porción de superficie de dicho toro que se encuentra fuera de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la cual orientamos según la normal exterior al toro.

(i) Demuestre que si $\vec{F}$ es un campo continuamente diferenciable en Σ, entonces se satisface:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\operatorname{rot}}\vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde:
C_1 y C_2 son las circunferencias obtenidas de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$ con los

planos $z = z_1$ y $z = z_2$ repectivamente, con $d = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$, $z_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$ y $z_2 = -z_1$, ambas orientadas en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Indicación: Usando coordenadas toroidales, calcule $\sin(\varphi)$ y las coordenadas del punto p de la fig.2

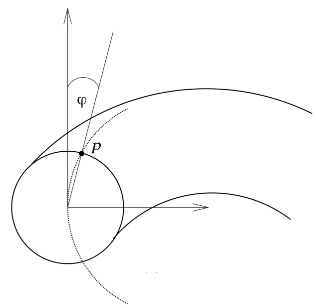

fig.2

(ii) Considere el campo $\vec{F} = (e^{-z^2}/\rho)\,\hat{\rho} + \hat{\theta} + \sin(\theta)\cos^3(z\theta)\,\hat{k}$, calcule:

$$\iint_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{F} \cdot \hat{n}\, dA$$

P.11 (EX, 2002). Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = (z+a)^2$ con $z \in [0, h]$ donde a y h son constantes positivas fijas.
Considere el campo vectorial $\vec{F} = (1/\rho)\,\hat{\rho} + (\rho^2 + z^2)\,\hat{\theta} + z\,\hat{k}$, donde ρ, θ y z son las variables en coordenadas cilíndricas. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S, primero por definición y luego haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

P.12 (EX, 2001).

(a) Sea $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\hat{\imath} + F_2(x, y, z)\hat{\jmath} + F_3(x, y, z)\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Suponga que $\vec{F}$ es el rotor de algún campo vectorial y que $F_3(x, y, z) = \vec{F} \cdot \hat{k} = 1$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del semicasquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$, orientado según la normal superior.

(b) Considere una cañería cilíndrica de longitud L y de radios a y b, la cual conduce un líquido a temperatura T_1, mayor que la temperatura exterior T_0. Se desea determinar el régimen estacionario de la temperatura; para ello suponga que la conductividad térmica k es constante y suponga además simetría cilíndrica, es decir, $T(\rho,\,\theta,\,z) = T(\rho)$.

(i) Para $\rho \in [a, b]$ considere el flujo de calor

$$\Phi(\rho) := \iint_{\Sigma(\rho)} k\,\nabla T \cdot d\vec{S}$$

a través del manto del cilindro de radio ρ y longitud L ($\Sigma(\rho)$).
Usando el Teorema de la divergencia, demuestre que $\Phi(\rho)$ es constante e igual a $\Phi(b)$.

(ii) Deduzca que $\rho\,\frac{\partial T}{\partial \rho}$ es constante y encuentre una expresión analítica para $T(\rho)$ en función de T_0, T_1, a, b.

(iii) Pruebe que $\Phi(b) = 2\pi L k(T_0 - T_1)/\ln(b/a)$.

Indicación: Recuerde que la ecuación del calor para el caso en que la conductividad k

es constante está dada por:

$$c\,\varrho\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\triangle T$$

con lo que para el caso estacionario, se trata de la ecuación de Laplace:

$$k\,\triangle T = 0$$

P.13 (C2, 2001).

(a) Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ una superficie regular cuyo borde $\partial\Sigma$ es una curva cerrada, simple y regular por tramos. Demuestre que el área de Σ puede ser calculada por

$$Area(\Sigma) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{f} = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}$

(b) Dado el campo

$$\vec{f} = (6zy^2 + \cos(x^2))\,\hat{\imath} + (xz\sin(xz) + 2x^3)\,\hat{\jmath} + (xy\sin(xy) - 2x^3)\,\hat{k}$$

y la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde

$$\Gamma_1 = \{(x,0,z)/\, x^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x,y,0)/\, x^2+y^2 = 1, y \geq 0\}$$

Calcule

$$\oint_{\Gamma} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

P.14 (C2, 2001).

(a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ cuyo borde Σ satisface las hipótesis del teorema de la divergencia. Sea $\vec{f}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$\lim_{r\to\infty} r^2\|\vec{f}(\vec{r})\| = 0$$

Pruebe que

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} div(\vec{f})dV = \int\int_{\Sigma} \vec{f}\cdot\hat{n}\,dA$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal interior a Ω sobre Σ

Indicación: Use el teorema de la divergencia en $B(0,r)\setminus\bar{\Omega}$ con r suficientemente grande.

(b) Sea Ω la porción del casquete esférico de radio R con $0 \leq z \leq R/2$. Calcule el flujo del campo

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(e^{(z+y^2)}\cos(y) + 4x,\; z\sinh(x) + y,\; x^2 + y^2 - 4z\right)$$

a través de la superficie Ω según la normal exterior.

Consultas y sugerencias a `fcollarte@dim.uchile.cl`.