MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Álvaro Hernández. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Francisco Collarte.

Auxiliar 3

30 de agosto de 2010

P1. *Problema 3.5 , página 56 apunte*

Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria(de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Considere Γ recorrida en sentido antihorario

(a) Calcule la integral de trabajo del campo $(x^2 + z)\,\hat{\imath} + (y^2 + x)\,\hat{\jmath} + (z^2 + y)\,\hat{k}$ a lo largo de Γ.

(b) Sea $\vec{F} = \frac{1}{r}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilÌndricas). Pruebe que $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ y $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el Teorema de Stokes.

P2. *Integrales de Línea*

Calcular las siguientes integrales de línea.

(a)

$$\int_\gamma \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$$

En donde γ recorre la curva (círculo) $x^2 + y^2 = a^2$ en sentido antihorario.

(b)

$$\int_\Gamma (x - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

Con Γ la intersección del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y el plano de ecuación $x + z = 1$.

P3. *Campos Conservativos*

Justifique que el campo $\vec{G}(x, y, z) = (2xy \cos z, x^2 \cos z, -x^2 y \sin z)$ es conservativo y encuentre el potencial asociado.

P4. *Fórmulas de integración por partes*

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera $\partial\Omega$.

(a) Demuestre la primera identidad de Green: dados $f \in C^2(\Omega)$ y $g \in C^1(\Omega)$, se tiene

$$\iint_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV.$$

Sean $\phi, \psi \in C^2(\Omega)$, deduzca la segunda identidad de Green:

$$\iint_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\, dV.$$

(b) (*Propuesto*)
Considere ahora $\phi \in C^2(\Omega)$ un campo escalar armónico, es decir, $\Delta\phi = 0$. Sea $\vec{p} \in \text{int}(\Omega)$ y definamos la función $\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{p}\|}$

i) Muestre que $\Delta\psi = 0$ en $\Omega \setminus \{\vec{p}\}$.

ii) Sea $E(\vec{p}, \delta) \subseteq \Omega$ la esfera de centro $\vec{p}$ y radio δ, contenida en Ω. Aplicando la segunda identidad de Green a $\Omega \setminus E(\vec{p}, \delta)$ muestre que

$$\iint\limits_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\partial E(\vec{p},\delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}$$

iii) Muestre que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \iint\limits_{\partial E(\vec{p},\delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = -4\pi\phi(\vec{p})$$

y concluya que

$$\phi(\vec{p}) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}$$

Esto muestra, que el valor de $\phi(\vec{p})$ de una función armónica, se puede expresar completamente en términos de su valor en $\partial\Omega$.

$\boxed{\text{P5.}}$ *Cálculo de flujo*
Calcular el flujo hacia el exterior de la región encerrada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$, del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ directamente y usando el teorema de Gauss.