MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Álvaro Hernández. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Andrés Zúñiga.

Auxiliar 1

17 de agosto de 2010

P1. (a) Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, demuestre que ∇f es perpendicular a los conjuntos de nivel de f.

(b) (Propuesto)
Describa las líneas del campo gravitacional:

$$\overrightarrow{F}(\vec{r}) = -\frac{GM}{\| \vec{r} \|} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}$$

Verifique, usando la definición en cartesianas de div, que $\triangle f \equiv 0 \in \mathbb{R}^3 \diagdown \{\vec{0}\}$

P2. *Coordenadas Parabólicas*

(a) Calcular el elemento de volumen en coordenadas parabólicas (ϵ, η, ϕ) que se relacionan con las coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$x = \epsilon\eta \cos\phi$$

$$y = \epsilon\eta \sin\phi$$

$$z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2).$$

Donde $\eta, \epsilon \geq 0$y $\phi \in [0, 2\pi]$

(b) Justifique el nombre del sistema de coordenadas.

(c) Calcule el operador Laplaciano en estas coordenadas.

P3. *Problema 1.2 del apunte*

(a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1. Demestre que:

$$rot \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b rot\varphi(\vec{r}, t)dt \tag{1}$$

Indicación: Puede usar la regla de Liebnitz: $\frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\vec{r}, t)dt$, donde $\vec{r} = (x, y, z)$, y u representa cualquier variable cartesiana.

(b) Considere el campo vectorial $\overrightarrow{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \| \vec{r} \|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $div\overrightarrow{F} = 0$ y pruebe que:

$$rot[\overrightarrow{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] = 2t\overrightarrow{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\overrightarrow{F}(t\vec{r}). \tag{2}$$

(c) Sea ahora $\overrightarrow{F}$ un campo cualquiera que satisface $div\overrightarrow{F} = 0$ en una bola B de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar que (2) es válida en B. Definamos el campo vectorial $\overrightarrow{G}(\vec{r}) = \int_0^1 [\overrightarrow{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}]dt$. Usando lo anterior concluya que $rot\overrightarrow{G} = \overrightarrow{F}$ en B.