Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 22 de Noviembre de 2006. Prof.: Felipe Alvarez.

Respecto a la Técnica de Extensión mediante una función par o impar

Cuando se resuelve una EDP en un intervalo asimétrico del tipo $[0, L]$ o bien $[0, +\infty)$, tanto mediante series de Fourier para el primer caso como usando transformada de Fourier para el segundo, parte de la técnica de resolución consiste en extender el problema a un intervalo simétrico de la forma $[-L, L]$ o $(-\infty, +\infty)$ respectivamente.

Habitualmente esto se hace vía una de las siguientes dos opciones: (a) extensión impar y (b) extensión par. El criterio para escoger cuál de estas opciones corresponde a cada caso depende de si estamos usando series de Fourier en $[0, L]$ o transformada de Fourier para $[0, +\infty)$ tal como se describe a continuación.

(a) **Extensión impar**.

(a.1) Series de Fourier: si se quiere escribir $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ en una serie de Fourier del tipo

$$f(x) = \sum_{h=1}^{+\infty} a_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{L})$$

entonces extendemos primero f a todo $[-L, L]$ de forma impar mediante

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y calculamos la serie de Fourier para $\overline{f}$ en $[-L, L]$. Por ser función impar, todos lo coeficientes que de la serie de $\overline{f}$ que acompañan a los términos de la forma $\cos(\frac{k\pi x}{L})$ son nulos.

(a.2) Transformada de Fourier: si se quiere aplicar transformada de Fourier con respecto a x a una función $u = u(t, x)$, necesitamos primero que esté definida sobre todo $\mathbb{R}$. Si en principio $u(t, x)$ sólo está definida para $x > 0$ pero satisface una condición de borde en $x = 0$ de tipo Dirichlet homogéneo, es decir

$$(*) \qquad u(t, 0) = 0$$

entonces la extendemos a todo x de forma impar

$$\overline{u}(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & \text{si } x \geq 0 \\ -u(t, -x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La razón es que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar continua entonces necesariamente $\varphi(0) = 0$. En efecto, si φ es impar entonces $\varphi(\varepsilon) = -\varphi(-\varepsilon)$ y haciendo $\varepsilon \to 0$ en esta igualdad, por continuidad se deduce $\varphi(0) = -\varphi(0)$ lo que implica que $2\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$.

Así, para la función extendida impar $\overline{u}(t,x)$ la condición $(*)$ en $x = 0$ se satisface automáticamente (en la medida que sea continua, lo que ocurre si los datos del problema son suficientemente regulares como se asume generalmente).

(b) **Extensión par**.

(b.1) Series de Fourier: si se quiere descomponer $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ en series de Fourier del tipo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(\frac{k\pi x}{L})$$

entonces extendemos primero f a todo $[-L, L]$ de forma par

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

por un argumento análogo al caso (a.1).

(b.2) Transformada de Fourier: bajo las mismas condiciones de (a.2), pero con la condición de borde $(*)$ sustituida por una de tipo Neuman homogéneo

$$(**) \qquad u_x(t,0) = 0$$

entonces extendemos $u(t,x), x > 0$, a todo $x \in \mathbb{R}$ de forma par

$$\bar{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & \text{si } x \geq 0 \\ u(t,-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La razón es que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par diferenciable entonces necesariamente $\varphi'(0) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon - (-\varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)}{2\varepsilon} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad usamos que por paridad se tiene $\varphi(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$. Así, $(**)$ se satisface automáticamente para la función $\overline{u}(t,x)$ por ser par con respecto a x (en la medida que sea diferenciable, lo que ocurre si los datos del problema son suficientemente regulares).