MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Álvaro Hernández. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Francisco Collarte.

Auxiliar 14

23 de noviembre de 2010

P1. Sea $A \subset \mathbb{R}$. La función característica sobre conjunto A se define como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Encuentre la transformada de Fourier de la función característica sobre un intervalo. Sea $g_n = \chi_{[-n,n]}$ y $h = \chi_{[-1,1]}$. Calcule la convolución entre g_n y h y encuentre su transformada de Fourier. Justifique su respuesta.

P2.

1. Encontrar la expansión en serie de Fourier de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0, \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq \pi. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

2. A partir de la serie de Fourier de f deducir

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

análogamente, a partir de la serie de Fourier de g deducir

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

P3.

i) Demuestre que la transformada de Fourier de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, está dada por $\hat{f}(s) = \dfrac{-i}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}se^{-|s|}$

i) Las vibraciones de una varilla semi infinita satisfacen las ecuación:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0. \qquad x > 0, t > 0$$

Suponiendo que la varilla está empotrada en los extremos ($u(0,t) = u(+\infty, t) = 0, \forall t > 0$) y que inicialmente se encuentra en reposo ($u_t(x,0) = 0$) en la posición $u(x,0) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, demuestre que:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty se^{-s}\cos(as^2t)\sin(sx)$$

P4. Si $n \geq m+2$ pruebe que:

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}dx = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}(m+1)\right)}$$

HINT: Considere una curva con forma del borde de un *trozo de pizza* de ángulo $\dfrac{2\pi}{n}$