

MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Álvaro Hernández. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Francisco Collarte.

Auxiliar 12

8 de noviembre de 2010

P1. i) Demuestre que la transformada de Fourier de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}, \text{ está dada por } \hat{f}(s) = \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|}$$

ii) Suponiendo que las funciones $f, g, \hat{f}, \hat{g}$ decaen lo suficientemente rápido en infinito, de modo que todas las integrales que aparezcan sean convergentes:

o Demuestre, usando la transformada de Fourier, la identidad de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{g(y)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \overline{\hat{g}(s)} ds$$

o Deduzca la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

P2. Se conoce como el Kernel de Poisson a

$$\mathcal{P}_y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0$$

i) Demuestre que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|y} e^{isx} ds = \mathcal{P}_y(x)$$

ii) Demuestre que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(x) e^{-isx} dx = e^{-|s|y}$$

P3. Supongamos que Ψ es una función que decae suficientemente rápido en infinito, que además satisface una condición de normalización $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$, pruebe que:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} s^2 |\hat{\Psi}(s)|^2 ds \right) \geq \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Alcanzándose la igualdad cuando $\Psi(x) = A e^{-Bx^2}$, para ciertas constantes A, B que satisfacen

$$A^4 = B^2 \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \text{ con } B > 0.$$

Propuesto: si $x_0, s_0 \in \mathbb{R}$, probar que:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} [x - x_0]^2 |\Psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} [s - s_0]^2 |\hat{\Psi}(s)|^2 ds \right) \geq \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

P4. Sea $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- Calcular $\hat{f}(s)$
- Calcular $\int_0^\infty \frac{\cos t \frac{\pi}{2}}{1-t^2} dt$
- Calcular $\int_0^\infty \frac{\cos^2 t \frac{\pi}{2}}{(1-t^2)^2} dt$

P5. • Usando la Transformada de Fourier, encontrar la solución de la ecuación integral:

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{4(x-y)^2} f(y) dy$$

- Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, f' continua, y $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Encontrar $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t), \quad t \in \mathbb{R}$$