MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Álvaro Hernández. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Francisco Collarte.

Auxiliar 10

25 de octubre de 2010

P1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

- Dado $\theta_0 \in]0, 2\pi[$ demuestre que si

$$\lim_{R\to+\infty} R\int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})|d\theta = 0$$

  Entonces

$$e^{i\theta_0}\int_0^{\infty} f(e^{i\theta_0}x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

- Demuestre que $f(z) = e^{-z^2}$ satisface la condición anterior $\forall\theta_0 \in]0, \pi/4]$
- Sabiendo que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ calcule el valor de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos x^2 dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin x^2 dx$$

  HINT: $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

P2.

- Determine la serie de Laurent para $3 < |z - 3i| < 5$ de

$$\frac{4}{4z - z^2}.$$

- Calcular las siguientes integrales:
  - $\displaystyle I = \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z^2+1)z^2}$
  - $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k+\sin\theta} \quad k > 1$
  - $\displaystyle I = \int_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z})dz$

P3.

- Utilizando la fórmula de Cauchy, evaluar las suguientes integrales:
  - $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$
  - $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(e^{i\theta}-i\theta)} d\theta$

- Mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

HINT: Integrar $\frac{e^{iz}}{z}$ en un contorno adecuado (lo dibujo en clases :P)

- Mostrar que si $a, b > 0$ entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

HINT: Integrar $f(z) = \frac{1}{z}$ sobre la elipse descrita por $\gamma(\theta) = a\cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in [0{,}2\pi]$

$\boxed{\text{P4.}}$

- Calcular para algún $z_0 > 0$

$$\int_{[0,z_0]} \Re(z)dz$$

- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $\partial\Omega$ es regular por trozos y simple. Si consideramos $z_0 \in int(\Omega)$. Calcular

$$I_n = \oint_{\partial\Omega} (z - z_0)^n dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Calcular las siguientes integrales:
  - $\int_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2} dz$
  - $\oint_{\partial B(1,1)} \frac{3}{z-1} dz$
  - $\int_{|z|=1} (\overline{z})^n dz, \quad n > 1$