

Resumen Esquemático del curso MA26B

Oscar Peredo A. *

18 de Junio de 2003

1. Introducción

Este resumen tiene por objetivo presentar la mayor parte de los contenidos del curso ma26b de forma simple y sin demostraciones. Se incluyen esquemas mnemotécnicos fáciles de asimilar y definiciones extraídas de los apuntes del profesor. La intención de estas páginas no es reemplazar los apuntes oficiales del curso, sino dar un enfoque resumido de estos, abarcando menor cantidad de contenidos, con énfasis en los tópicos principales de cada capítulo.

2. Curvas y Superficies en $\mathbf{R}^3$

2.1. Curvas

Definición 1 Un conjunto Γ se llama **curva** si existe una función continua $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ llamada **parametrización de la curva** tal que

$$\Gamma = \vec{r}([a, b]) = \{\vec{r}(t) \in \mathbf{R}^3 | t \in [a, b], a, b \in \mathbf{R}\} \quad (1)$$

Además, Γ puede ser:

- **Suave** si $\vec{r} \in \mathcal{C}$.
- **Regular** si $\|\dot{\vec{r}}\| > 0$.
- **Simple** si $\vec{r}$ es inyectiva.
- **Cerrada** si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Definición 2 Se llama **velocidad** al vector $\vec{v}(t): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \quad (2)$$

Definición 3 Se llama **rapidez** al escalar $s(t)$ determinado por

$$s(t) = \|\vec{v}\| = \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| \quad (3)$$

Definición 4 Se llama **vector tangente** al vector $\hat{t}$ determinado por

* Alumno de Ingeniería de la Universidad de Chile

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{s(t)} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (4)$$

2.1.1. Sistemas de Coordenadas Ortogonales

Los SCO¹ mas conocidos son los sistemas Cartesiano, Cilíndrico, Esférico y Toroidal. Comenzaremos por listar los **factores escalares**, de suma importancia en la obtención de gradientes, divergencias y rotores, entre otros usos.

Para $\mathbf{R}^3$, los factores escalares, en un SCO son los siguientes:

- $h_u = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|$
- $h_v = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|$
- $h_w = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$

Cartesianas	$h_x = 1$	$h_y = 1$	$h_z = 1$
Cilíndricas	$h_\rho = 1$	$h_\theta = \rho$	$h_z = 1$
Esféricas	$h_r = 1$	$h_\theta = r \sin \varphi$	$h_\varphi = r$

2.1.2. Gradiente en Coordenadas Ortogonales

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{w} \quad (5)$$

2.1.3. Elemento de Volumen dV

$$dV = h_u h_v h_w du dv dw \quad (6)$$

Cilíndricas	$dV = \rho d\rho d\theta dz$
Esféricas	$dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$

2.1.4. Longitud de Arco (Γ)

Definicion 5 La *longitud de arco* de Γ se define como la siguiente integral

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \left\| \frac{\partial \vec{r}(\tau)}{\partial \tau} \right\| d\tau \quad (7)$$

¹Ver apunte para descripción de los Sistemas de Coordenadas principales

2.1.5. Integral de Línea

Definición 6 La integral de línea de una función $f : D \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ sobre Γ , parametrizada por la función $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ se representa por

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(\vec{r}(\tau)) \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau \quad (8)$$

2.1.6. Parametrización en longitud de arco

Primero se presenta la función $s(t)$, que representa la distancia recorrida por la curva en el instante t

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau \quad (9)$$

, luego la parametrización en longitud de arco queda enunciada por

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s)) \quad (10)$$

Con esto, (4) se puede definir como

$$\frac{d\vec{\sigma}(s)}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}(t(s))}{dt} \right\|} \frac{d\vec{r}(t(s))}{dt} \quad (11)$$

2.1.7. Curvatura, Radio de Curvatura, Vector Tangente y Vector Normal

Curvatura	$k(s) = \left\ \frac{dT}{ds}(s) \right\ = \left\ \frac{d^2\vec{\sigma}}{ds^2}(s) \right\ $	$k(t) = \frac{\left\ \frac{dT}{dt}(t) \right\ }{\left\ \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\ }$
Radio de curvatura	$R(s) = \frac{1}{k(s)}$	$R(t) = \frac{1}{k(t)}$
Vector Tangente	$T(s) = \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) = \hat{t}$	$T(t) = \frac{1}{\left\ \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\ } \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$
Vector Normal	$N(s) = \frac{1}{\left\ \frac{dT}{ds}(s) \right\ } \frac{dT}{ds}(s)$	$N(t) = \frac{1}{\left\ \frac{dT}{dt}(t) \right\ } \frac{dT}{dt}(t)$

2.1.8. Vector Binormal

Definición 7 Se llama **vector binormal** al vector B obtenido de la operación

$$B = T \times N \quad (12)$$

, donde T es el vector tangente y N es el vector normal.

Una consecuencia de esta definición es la siguiente propiedad

Propiedad 1 Γ es plana $\iff \frac{dB}{ds} = 0$

2.1.9. Torsión

Definición 8 Se define la **torsión** τ de Γ como

$$\tau(s) = - \left\langle \frac{dB}{ds}, N \right\rangle \quad (13)$$

$$\tau(t) = - \frac{\left\langle \frac{dB}{dt}, N \right\rangle}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|} \quad (14)$$

2.1.10. Fórmulas de Frenet

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

2.2. Superficies

Definición 9 Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es **Conexo** sí y solo sí $\forall x, y \in \Omega, \exists \Gamma$ regular por trozos tal que $\Gamma \subseteq \Omega$ con x e y puntos extremos de Γ .

Definición 10 Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es **Convexo** sí y solo sí Γ es segmento de recta.

2.2.1. Vectores Tangentes en (u_0, v_0)

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{1}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \right\|} \quad (15)$$

$$\hat{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{1}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \quad (16)$$

2.2.2. Plano tangente a la superficie en (u_0, v_0)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}_0 + \alpha \hat{t}_u(u_0, v_0) + \beta \hat{t}_v(u_0, v_0) \quad (17)$$

2.3. Vector Normal

$$= \hat{t}_u \times \hat{t}_v \cdot \frac{1}{\left\| \hat{t}_u \times \hat{t}_v \right\|} \quad (18)$$

(19)

Otra forma de representar el plano tangente, utilizando el vector normal, es

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{r}_0, \hat{n} \right\rangle = 0 \quad (20)$$

2.3.1. Área de Superficie S

Definición 11 El **área de superficie** de S parametrizada por la función $\vec{r} : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ se define como la siguiente integral doble

$$Area(S) = \int \int_U \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (21)$$

$$dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

2.3.2. Integral de Superficie

Definición 12 La integral de superficie de una función $f : D \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ sobre S , parametrizada por la función $\vec{r} : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ se representa por

$$\int \int_S f dA = \int \int_U f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (22)$$

3. Integración de Campos Vectoriales

3.1. Integral de Trabajo

Definición 13 La integral de trabajo de una función $F : D \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ sobre Γ , parametrizada por la función $\vec{r} : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ se representa por

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(\tau)) \bullet \frac{d\vec{r}}{dt}(\tau) d\tau \quad (23)$$

3.2. Campos Conservativos

Propiedad 2 $F = -\nabla g \implies \oint_{\Gamma} F \bullet d\vec{r} = 0$

3.3. Integral de Flujo

Definición 14 La integral de flujo de una función $F : D \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ sobre S , parametrizada por la función $\vec{r} : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ se representa por

$$\int \int_S F \bullet \hat{n} dA = \int \int_U F(\vec{r}(u, v)) \bullet \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)(u, v) du dv \quad (24)$$

4. Teoremas del Cálculo Vectorial

4.1. Teorema de la Divergencia

Definición 15 Dada $F : U \subseteq \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 se define la **divergencia** de F como

$$\mathbf{div}F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \quad (25)$$

$$\text{donde } F = f_1\hat{i} + f_2\hat{j} + f_3\hat{k} \quad (26)$$

Teorema 1 Sea $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos orientado según la normal exterior. Sea $F : \Omega' \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Omega' \supseteq \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, entonces

$$\int \int_{\partial\Omega} F \bullet \hat{n} dA = \int \int \int_{\Omega} \mathbf{div}F dV \quad (27)$$

4.2. Divergencia en Coordenadas Curvilíneas

$$\mathbf{div}F = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right) \quad (28)$$

4.3. Teorema de Stokes

Definición 16 Dada $F : U \subseteq \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 se define el **rotor** de F como

$$\mathbf{rot}F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (29)$$

$$\text{con } F = f_1\hat{i} + f_2\hat{j} + f_3\hat{k} \quad (30)$$

4.4. Rotor en Coordenadas Curvilíneas

$$\mathbf{rot}F = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix} \quad (31)$$

Teorema 2 Sea $S \subseteq \mathbf{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde² $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $F : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\int \int_S \mathbf{rot}F \bullet \hat{n} dA = \oint_{\Gamma} F \bullet d\vec{r} \quad (32)$$

²Ver apunte

Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{n}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Propiedad 3 Si F es conservativo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$, con Ω conexo $\implies \mathbf{rot}F = 0$.

Propiedad 4 Si $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\mathbf{rot}F = 0$ y Ω es un dominio apropiado³ $\implies F$ es conservativo.

$$\begin{aligned}\mathbf{div}F &= \vec{\nabla} \bullet F \\ \mathbf{rot}F &= \vec{\nabla} \times F \\ \nabla f &= \vec{\nabla} f\end{aligned}$$

4.5. Fórmula de Green o Integración por partes

Para las funciones $f, g : \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ y $F : \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ se cumplen las siguientes fórmulas

$$\int \int \int_{\Omega} \nabla f \bullet F dV = \int \int_{\partial\Omega} f F \bullet \hat{n} dA - \int \int \int_{\Omega} f \mathbf{div}F dV \quad (33)$$

Para el caso $F = \nabla g$,

$$\int \int \int_{\Omega} \nabla f \bullet \nabla g dV = \int \int_{\partial\Omega} f \nabla g \bullet \hat{n} dA - \int \int \int_{\Omega} f \mathbf{div} \nabla g dV \quad (34)$$

Ahora utilizando la notación $\frac{\partial g}{\partial \hat{n}} = \nabla g \bullet \hat{n}$ y $\mathbf{div}(\nabla g) = \Delta g$,

$$\int \int \int_{\Omega} \nabla f \bullet \nabla g dV = \int \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} dA - \int \int \int_{\Omega} f \Delta g dV \quad (35)$$

³Ver apunte

5. Variable Compleja

Las definiciones de **producto**, **inverso** y **módulo** en $\mathbf{C}$ no se darán por razones obvias.

5.1. Continuidad y Derivabilidad en $\mathbf{C}$

5.1.1. Continuidad

$$\left\| \begin{array}{l} f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} , \text{ con } \Omega \text{ abierto} , f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \\ y z = x + iy \text{ es } \mathbf{continua} \text{ en } z_0 \\ \\ \Longleftrightarrow \\ \\ \forall (z_n)_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbf{C} , \text{ con } z_n \rightarrow z_0 , \text{ se tiene } f(z_n) \rightarrow f(z_0) \\ \\ \Longleftrightarrow \\ \\ u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ y } v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ son continuas en } (x_0, y_0) \end{array} \right\|$$

5.1.2. Derivabilidad

$$\left\| \begin{array}{l} f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \text{ con } \Omega \text{ es abierto es derivable en } z_0. \\ \\ \Longleftrightarrow \\ \\ \text{Si } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \text{ existe.} \end{array} \right\|$$

Si f es derivable en Ω se dice que f es **holomorfa** en Ω .

Propiedad 5 f es derivable en $z_0 \implies f$ es continua en z_0

5.2. Condiciones de Cauchy - Riemann

$$\left\| \begin{array}{l} z = x + iy , f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ si } f \text{ es derivable en } x_0 + iy_0 \\ \\ \implies \\ \\ F \text{ es Frechet - Diferenciable en } (x_0, y_0) \text{ vista como } f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \text{ y además} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \quad \wedge \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R} \text{ holomorfa en } \Omega \text{ tal que } f(z) = u(x, y) + i \cdot 0 \\ \\ \implies \\ \\ f'(z) = 0, \text{ lo cual indica que si } \Omega \text{ es conexo, } f = c, c \in \mathbf{R} \text{ constante} \end{array} \right\|$$

5.3. Series de Potencias

Definicion 17 El **radio de convergencia** de una serie de potencias $s(z)$ se define de la siguiente forma

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \quad (36)$$

La serie

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

converge en

$$D(a, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| < R\}$$

y es holomorfa en $D(a, R)$.

5.4. Funciones Hiperbólicas

$$\cosh(z) = \cosh(x) \cos(y) + i \sinh(x) \sin(y) \quad (37)$$

$$\sinh(z) = \sinh(x) \cos(y) + i \cosh(x) \sin(y) \quad (38)$$

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(x) = 1 \quad (39)$$

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (40)$$

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (41)$$

5.5. Funciones Trigonómicas

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (42)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (43)$$

$$\cos(z) = \cosh(iz) \quad (44)$$

$$\sin(z) = \frac{1}{i} \sinh(iz) \quad (45)$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (46)$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (47)$$

5.6. Integración en $\mathbf{C}$

La integración en el cuerpo de los complejos no difiere sustancialmente a la integración en los reales, lo fundamental en esta sección es no olvidar que todas las operaciones deben realizarse cuidando de multiplicar en el sentido complejo y saber cuando es posible trasladarse a un problema de integración equivalente en los reales y luego volver al problema complejo y aplicar algunas técnicas.

Definición 18 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ continua. Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{C}$, con $\Gamma \subset \subset \Omega$. La parametrización de Γ es una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ con $\Gamma = \gamma([a, b])$. La **integral de f sobre Γ** se define mediante

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \quad (48)$$

o equivalentemente

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \bullet d\vec{r} + i \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \bullet d\vec{r} \quad (49)$$

$$\text{con } d\vec{r} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt.$$

Definición 19 La **primitiva** F en $\Omega = \begin{cases} \mathbf{C}, & k \geq 0 \\ \mathbf{C} \setminus \{z_0\}, & k < 0 \end{cases}$ de una función $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, con

$$f(z) = (z - z_0)^k, \text{ con } k \neq -1 \quad (50)$$

esta definida por

$$F(z) = \frac{1}{k+1} (z - z_0)^{k+1} \quad (51)$$

Corolario 1 Si $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, con radio de convergencia R , entonces

$$\forall \Gamma \text{ cerrado}, \Gamma \subseteq D(z_0, R), \oint_{\gamma^*} s(z) dz = 0 \quad (52)$$

5.7. Teorema de Cauchy-Goursat

Teorema 3 Sea $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ un abierto simplemente conexo⁴ y no vacío. Sea $f \in H(\Omega)$. Entonces, para todo camino cerrado $\Gamma \subseteq \Omega$ se tiene

$$\oint_{\gamma^*} f(z)dz = 0 \quad (53)$$

Teorema 4 Sea $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ un abierto conexo. Consideremos $f : \Omega \setminus \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{C}$ una función holomorfa en $\Omega \setminus \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario. Sea D la región encerrada por Γ . Supongamos que $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$ y escojamos $\epsilon > 0$ tal que $\forall j = 1, \dots, n, \overline{D}(p_j, \epsilon) \subseteq D$ y además $\overline{D}(p_j, \epsilon) \cap \overline{D}(p_k, \epsilon) \neq \emptyset$ si $k \neq j$. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \epsilon^{it}, t \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz \quad (54)$$

5.8. Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 5 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$, $r < 0$ y $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$\forall z_0 \in D(p, r), f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (55)$$

,recorrida en sentido antihorario.

5.9. Serie de Taylor

Teorema 6 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ continua en Ω abierto, holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$, $r < 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$\exists (c_k)_{k \in \mathbf{N}} \text{ tal que, } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - p)^k, \forall z \in D(p, r) \quad (56)$$

,con

$$c_k = \frac{f^{(k)}}{k!}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw$$

Corolario 2 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ continua en Ω abierto, holomorfa en Ω salvo en un número finito de puntos $\implies f$ es holomorfa en Ω y f es de clase C^∞ en Ω .

⁴Ver apunte para definicion de conjunto simplemente conexo.

6. Residuos

Definición 20 Un punto $p \in \mathcal{C}$ es un **punto singular aislado** si y solo si $\exists R > 0$ tal que $f \in H(D(p, R) \setminus \{p\})$ pero f no es holomorfa en p .

Definición 21 Un punto singular aislado es **evitable** si y solo si

$$\exists L_0(p) \text{ tal que } L_0(p) = \lim_{z \rightarrow p} f(z)$$

Definición 22 Un punto singular aislado es **polo de orden m** si y solo si

$$\exists m \geq 1 \text{ (el menor entero), tal que } L_m(p) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z)$$

Definición 23 Un punto es **polo simple** si y solo si es polo con $m = 1$.

6.1. Teorema de los residuos de Cauchy

Definición 24 El **residuo** de una función f en un punto p se denota $\text{res}(f, p)$ y se define por

$$\text{res}(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} f(z) dz$$

(57)

$$\text{res}(f, p) = \frac{g^{(m-1)}(p)}{(m-1)!}$$

$$, \text{ donde } g(z) = \begin{cases} (z-p)^m f(z) & \text{si } z \neq p \\ L_m & \text{si } z = p \end{cases}.$$

Esta fórmula solo es útil directamente cuando p es un polo simple, es decir $m = 1$, en cuyo caso

$$\text{res}(f, p) = g(p) = L_m = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z)$$

En el caso gnral, como $g \in H(\Omega)$ en particular, $g^{(k)}(z)$ es continua en $\Omega, \forall k \geq 0$ y en consecuencia

$$\text{res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} = \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} [(z-p)^m f(z)]$$

Teorema 7 Sea f una función meromorfa⁵ en un abierto Ω y sea P el conjunto de los polos de f . Dado un camino cerrado simple Γ que no pasa por los puntos en P , es decir, $\Gamma \cap P = \emptyset$, el cual encierra una región $D \subseteq \Omega$, entonces $D \cap P$ es finito (o vacío), digamos $D \cap P = \{p_1, \dots, p_n\}$ y si Γ esta recorrida en sentido antihorario entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res}(f, p_j) \quad (58)$$

Como ejemplo de aplicación consideremos una función del tipo $\frac{g(z)}{h(z)}$ con $g(p) \neq 0, h(p) = 0$ y p es polo simple. Tenemos que

$$\text{res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, p\right) = \frac{g(p)}{h'(p)}$$

Otro ejemplo de aplicación es la regla de L'Hôpital para las funciones $f, g \in H(\Omega), p \in \Omega, n \geq 1$, con $g(p) = \dots = g^{(n-1)}(p) = 0 \neq g^{(n)}(p)$, la cual esta caracterizada por

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \text{no existe} & f^{(k)}(p) \neq 0, \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \\ \frac{f^{(n)}(p)}{g^{(n)}(p)} & f^{(k)}(p) = 0, \forall k \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$$

7. Evaluación de Integrales

7.1. Senos y Cosenos

Utilizando el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, en las expresiones (42) y (43), obtenemos

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \quad (59)$$

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad (60)$$

⁵Ver apunte

7.2. Integrales Impropias y Dominios no acotados

Definición 25 Se llama *semiplano superior de $\mathbf{C}$* al conjunto

$$H = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\} \quad (61)$$

$$\text{y su interior } \text{Int}(H) = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} \quad (62)$$

Teorema 8 Sea f meromorfa en $\mathbf{C}$, P el conjunto de polos de f ,

- f no tiene polos en $\mathbf{R}$, $P \cap \mathbf{R} = \emptyset$.
- $\text{Int}(H) \cap P$ es finito.
- $\exists K \geq 0, M \geq 0, p > 1$ tal que $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \forall z \in H, |z| \geq M$.

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} \text{res}(f, z) \quad (63)$$

Corolario 3 Si p y q son polinomios primos entre sí, q no tiene ceros reales y $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 2$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, \text{Im}(z)>0} \text{res}\left(\frac{p}{q}, z\right) \quad (64)$$

Teorema 9 Sea f meromorfa en $\mathbf{C}$, P el conjunto de polos de f ,

- f tiene polos reales simples, $P \cap \mathbf{R}$ es finito.
- $\text{Int}(H) \cap P$ es finito.
- $\exists K \geq 0, M \geq 0, p > 1$ tal que $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \forall z \in H, |z| \geq M$.

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} \text{res}(f, z) + \pi i \sum_{j=1}^s \text{res}(f, a_j) \quad (65)$$

Corolario 4 Si p y q son polinomios primos entre sí, los ceros de q sobre $\mathbf{R}$ son simples y $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 2$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, \text{Im}(z)>0} \text{res}\left(\frac{p}{q}, z\right) + \pi i \sum_{q(a)=0, a \in \mathbf{R}} \text{res}\left(\frac{p}{q}, a\right) \quad (66)$$

Teorema 10 Sea f meromorfa en $\mathbf{C}$, P el conjunto de polos de f ,

- $P \cap \mathbf{R} = \emptyset$.
- $\text{Int}(H) \cap P$ es finito.
- $\exists K \geq 0, M \geq 0, p > 1$ tal que $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \forall z \in H, |z| \geq M$.

entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_R} f(z) e^{isz} dz = 0 \quad (67)$$

,luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{w \in \text{Int}(H) \cap P} \text{res}(f(z) e^{isz}, w) \quad (68)$$

Corolario 5 Si p y q son polinomios primos entre sí, q no tiene ceros sobre $\mathbf{R}$ y $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 1$, entonces

$$\forall s > 0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0, \text{Im}(w)>0} \text{res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, w\right) \quad (69)$$

Teorema 11 Sea f meromorfa en $\mathbf{C}$, P el conjunto de polos de f ,

- f tiene polos reales simples, $P \cap \mathbf{R}$ es finito.
- $\text{Int}(H) \cap P$ es finito.
- $\exists K \geq 0, M \geq 0, p > 1$ tal que $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \forall z \in H, |z| \geq M$.

entonces

$$\forall s > 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{w \in \text{Int}(H) \cap P} \text{res}(f(z) e^{isz}, w) + \pi i \sum_{j=1}^s \text{res}(f(z) e^{isz}, a_j) \quad (70)$$

Corolario 6 Si p y q son polinomios primos entre sí, los ceros de q sobre $\mathbf{R}$ son simples y $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 1$, entonces

$$\forall s > 0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0, \text{Im}(w)>0} \text{res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, z\right) + \pi i \sum_{q(a)=0, a \in \mathbf{R}} \text{res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, a\right) \quad (71)$$

8. Métodos de resolución de EDP

8.1. Separación de variables

$$u(x, t) = \chi(x) * T(t) \quad (72)$$

$\Downarrow$

$$\text{Reemplazar en EDP.} \quad (73)$$

$\Downarrow$

$$\text{Aplicar C.B. y estudiar la constante } \lambda . \quad (74)$$

$\Downarrow$

$$\text{Principio de Superposición, } v(x, t) = \sum_{k=-N}^N A_k \Phi_k(x, t) \quad (75)$$

$\Downarrow$

$$\text{Equivale a } v(x, t) = \sum_{k=1}^N \tilde{A}_k \Phi_k(x, t) \quad (76)$$

$\Downarrow$

$$\text{Aplicar Condiciones Iniciales} \quad (77)$$

8.2. Series de Fourier

Sea $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbf{R}$, podemos escribir su desarrollo en series de Fourier como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (78)$$

La forma compleja de la serie de Fourier es la siguiente

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} \quad (79)$$

$$\text{con } c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & k=0 \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & k < 0 \end{cases} .$$

Los coeficientes se obtienen de la siguiente forma

$$c_{k_0} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{\frac{-ik_0\pi x}{\ell}} dx \quad (80)$$

y los coeficientes reales,

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) d\xi \quad (81)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) d\xi \quad (82)$$

8.3. Transformada de Fourier

Definición 26 Sea $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ integrable ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$), entonces la **transformada de Fourier** de f es

$$T(f)(s) = \widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iys} dy \quad (83)$$

La antitransformada de una función f integrable es

$$T^{-1}(f)(x) = \check{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{ixs} ds \quad (84)$$

Teorema 12 Sea f integrable, $\widehat{f}$ integrable y f continua, entonces

$$f(x) = T^{-1}(T(f))(x) = \check{\widehat{f}}(x) \quad (85)$$

8.3.1. Propiedades

- T, T^{-1} son lineales.
- $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$

Corolario 7 Sean f y g continuas e integrables, tenemos que

$$\widehat{f} = \widehat{g} \implies f = g \quad (86)$$

8.3.2. Teorema de Convención

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \quad (87)$$

como consecuencia ,

$$(\widehat{f * g})(s) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(s)\widehat{g}(s) \quad (88)$$

8.3.3. Propiedades

$$a \neq 0, g(x) = f(ax), f \text{ integrable, entonces } \widehat{g}(s) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (89)$$

$$T(f(x-x_0))(s) = e^{isx_0}T(f)(s) \quad (90)$$

$$T(e^{is_0x}f(x))(s) = T(f)(s-s_0) \quad (91)$$

$$T(f(x)\cos(w_0x))(s) = \frac{1}{2}[\widehat{f}(s-w_0) + \widehat{f}(s+w_0)] \quad (92)$$

$$T(f(x)\sin(w_0x))(s) = \frac{1}{2i}[\widehat{f}(s-w_0) - \widehat{f}(s+w_0)] \quad (93)$$

Oscar Peredo <operedo@ing.uchile.cl>