Capítulo 2

Normas Equivalentes. Espacios Normados de Dimensión Finita

Dos son los resultados más importantes que, sobre la equivalencia de normas, veremos en este capítulo. El primero de ellos establece que, en el marco de los espacios normados, la equivalencia de normas es siempre lipschitziana. El segundo que sobre un espacio de dimensión finita, todas las normas son equivalentes. Incluiremos también en este capítulo la caracterización topológica, dada por F. Riesz, de los espacios normados de dimensión finita. Para terminar desarrollaremos algunas técnicas de índole práctico para la existencia de límite (continuidad) de funciones de varias variables.

Equivalencia de normas

Definición 2.1 Dos normas sobre un mismo espacio vectorial E se dicen equivalentes, cuando inducen la misma topología sobre E.

La proposición que veremos a continuación determinará que no tengamos necesidad de distinguir, como pasaba en los espacios métricos, entre distintas formas de equivalencia de normas.

Proposición 2.2 *Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|^*$ sobre E son equivalentes si y sólo si existen dos constantes $a, b > 0$ tales que*

$$a\|x\| \leq \|x\|^* \leq b\|x\|\,, \quad \forall x \in E. \tag{2.1}$$

Demostración. En efecto, si ambas normas son equivalentes, las bolas abiertas relativas a ellas, $\{B(x,r)\colon x \in E, r > 0\}$ y $\{B^*(x,r)\colon x \in E, r > 0\}$ constituyen dos bases de una misma topología. Entonces, puesto que $B(0,1)$ es un conjunto abierto debe existir $r > 0$ tal que $B^*(0,r) \subset B(0,1)$. Lo que significa que

$$\|x\|^* < r \quad \Rightarrow \quad \|x\| < 1.$$

Sea a un número real tal que $0 < a < r$, y un vector cualquiera. Si $y \neq 0$ es claro que el vector $u = a(y/\|y\|^*)$ verifica que $\|u\|^* = a < r$, y por tanto que $\|u\| < 1$. Se deduce pues que para $y \neq 0$, $a\|y\| < \|y\|^*$. En todo caso $a\|y\| \leq \|y\|^*$. Intercambiando los papeles de ambas normas, se obtiene la otra desigualdad.

Recíprocamente, si para todo $x \in E$ se tiene que $a\|y\| \leq \|y\|^* \leq b\|x\|$, es fácil deducir entonces que la aplicación Identidad:

$$Id\colon (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|^*)$$

es un homeomorfismo lipschitziano. En particular, las topologías que inducen estas normas sobre E coinciden, luego $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|^*$ son equivalentes. ∎

En la proposición anterior hemos demostrado que si dos normas sobre un mismo espacio vectorial E son equivalentes, los espacios normados $(E, \|\cdot\|)$ y $(E, \|\cdot\|^*)$ no sólo tienen las mismas propiedades topológicas, sino también las mismas propiedades uniformes y lipschitzianas. Puede resumirse este hecho diciendo que *en los espacios normados, la equivalencia de normas es siempre lipschitziana.*

Antes de pasar al estudio de los espacios normados de dimensión finita, es conveniente establecer algunas cuestiones referentes al producto de espacios normados.

Definición 2.3 (Norma producto) Sean $(E_i, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, un número finito de espacios normados. Llamaremos norma producto de las normas $\|\cdot\|_i$ a la norma sobre $E = E_1 \times \ldots \times E_n$,

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max(\|x_1\|_1, \ldots, \|x_n\|_n).$$

Además de la norma producto, se puede probar que también definen normas sobre E las expresiones

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{p} \|x_i\|_i^p \right)^{1/p}.$$

Obviamente, si los espacios $E_i = \mathbb{R}$ para todo i y $\|\cdot\|_i = |\cdot|$, entonces las normas anteriores son las ya estudiadas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_p$ de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.4 *Todas las normas anteriores son equivalentes e inducen en E la topología producto de los espacios $(E_i, \|\cdot\|_i)$.*

Demostración. Es fácil ver que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty,$$

lo que demuestra que todas estas normas son equivalentes.

Asimismo constituye un sencillo ejercicio comprobar que la topología que éstas inducen sobre E es la producto de los espacios $(E_i, \|\cdot\|_i)$. Como indicación, observar que, con respecto a la norma producto $\|\cdot\|_\infty$, las bolas en E son productos de bolas en E_i, es decir:

$$B(a,r) = \prod_{i=1}^{n} B(a_i, r)\,; \quad a = (a_1, \ldots, a_n).$$

∎

Espacios de dimensión finita

Como establece el teorema de Riesz, los espacios normados de dimensión finita son, bajo el punto de vista topológico, esencialmente diferente a los de dimensión infinita. Antes de enunciar este teorema, observemos que el modelo matemático en el que se representan los espacios normados de dimensión finita es $\mathbb{R}^n$, en el sentido de que:

Proposición 2.5 *Si E es un espacio normado de dimensión finita n, entonces existe alguna norma sobre $\mathbb{R}^n$, tal que E es isométrico a $\mathbb{R}^n$ con esa norma.*

Demostración. Sea $T\colon x \to (x_i)$ el isomorfismo de espacio vectoriales que asocia a cada vector x de E sus coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$ en una base dada. Obviamente $\|y\|^* = \|T^{-1}(y)\|$ define una norma sobre $\mathbb{R}^n$, para la que T es una isometría. ∎

La propiedad más importante de $\mathbb{R}^n$ como espacio normado, se establece en la proposición siguiente

Proposición 2.6 *En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.*

Demostración. Vamos a probar que cada norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ ($\|(x_1,\ldots,x_n)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$).

Consideremos para ello la aplicación

$$\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}.$$

Esta aplicación es continua pues, si denotamos por $e_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ y $M = \max(\|e_1\|,\ldots,\|e_n\|)$, entonces

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\|e_i\| \leq M\|x-y\|_1.$$

Además, si en la desigualdad anterior se toma $y = 0$, se tiene

$$\|x\| \leq M\|x\|_1. \tag{2.2}$$

Sea ahora $S = \{x : \|x\|_1 = 1\}$. Este conjunto es compacto ya que es un cerrado que es subconjunto de un compacto. Concretamente, $S \subset [-1,1]^n$. (Nótese que según 2.4 la topología del espacio normado $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ es la topología producto). Se deduce entonces que la aplicación $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ alcanza un mínimo sobre S, es decir existe un punto $u_0 \in S$ tal que $\|u_0\| \leq \|u\|$ cualquiera que sea $u \in S$. Sea $m = \|u_0\|$ y $x \neq 0$, cualquiera ($m > 0$ pues $u_0 \neq 0$). Puesto que $x/\|x\|_1$ es un punto de S, se tiene:

$$m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \quad \Rightarrow \quad m\|x\|_1 \leq \|x\|. \tag{2.3}$$

De 2.2 y 2.3, se deduce que ambas normas son equivalentes. ∎

2.7 De lo anterior se pueden extraer las siguientes consecuencias

1. En $\mathbb{R}^n$ un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado (respecto de cualquier norma).

   Sabemos que en todo espacio métrico cada compacto es un conjunto cerrado y acotado. Para probar que en $\mathbb{R}^n$ el recíproco también es cierto, basta observar que si un conjunto es acotado respecto de una norma es también acotado respecto de cualquier norma equivalente. Así, si K es cerrado y acotado, entonces es acotado respecto a la norma producto, luego existe alguna constante $r > 0$ tal que, para todo $x = (x_1,\ldots,x_n) \in K$

   $$|x_i| \leq r, \ (i = 1,2,\ldots,n) \quad \Rightarrow \quad K \subset [-r,r]^n.$$

   De esto se sigue pues que K es compacto.

2. $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach respecto de cualquier norma.

   Es fácil ver que esto es cierto para la norma producto (una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy si y sólo si las sucesiones coordenadas son de Cauchy etc.) Además, si $\|\cdot\|$ es otra norma cualquiera, $\mathbb{R}^n$ tiene las mismas propiedades topológicas, uniformes y lipschitzianas para ambas normas, ya que según la proposición anterior, son equivalentes. En particular $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es completo (propiedad uniforme).

3. Todo subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.

   En efecto, si F es un subespacio vectorial de dimensión n del espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, entonces $(F, \|\cdot\|)$ es isométrico a $\mathbb{R}^n$ (proposición 2.5), luego es completo. Como todo conjunto completo de un espacio métrico es cerrado, se deduce ya que F es cerrado.

Vamos a terminar esta sección con la caracterización topológica de los espacios normadas de dimensión finita, dada por F.Riesz. Usaremos para ello el siguiente lema

Lema 2.8 *Sea E un espacio normado y F un subespacio vectorial propio y cerrado en E. Entonces para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe un vector $x \in E$ tal que*

$$\varepsilon < d(x, F) < 1.$$

Demostración. Puesto que F es un conjunto cerrado distinto de E, existe algún vector y tal que $d(y, F) > 0$. Entonces algún proporcional de y, λy, debe verificar que

$$\varepsilon < d(\lambda y, F) < 1.$$

Tomemos ahora un vector $u \in F$ tal que $\|\lambda y - u\| < 1$, y sea $x = \lambda y - u$. Es claro entonces que

$$\varepsilon < d(\lambda y, F) = d(x, F) \leq \|x\| < 1.$$

∎

Teorema 2.9 (T. de Riesz) *Si E es un espacio normado, son equivalentes:*

(a) *E es de dimensión finita.*

(b) *La bola cerrada unidad es compacta.*

(c) *Los conjuntos compactos de E son, justamente, los cerrados y acotados.*

(d) *E es localmente compacto.*

Demostración. En primer lugar veamos que las condiciones (b), (c) y (d) son equivalentes: Supongamos que se verifica (b), y sea K un conjunto cerrado y acotado. Entonces K es subconjunto de una bola cerrada, por ejemplo

$$K \subset B[a, r].$$

Por la proposición 1.4, sabemos que $B[0, 1]$ y cualquier otra bola cerrada resultan simultáneamente compactas o no compactas. Se deduce pues que K es un subconjunto cerrado de un compacto, y por lo tanto K también es compacto.

Trivialmente (c) implica (d). Y aplicando de nuevo la proposición 1.4, se demuestra que (d) implica (b).

(a) implica todas las demás condiciones.

Por último, veamos que los espacios normados de dimensión finita son los únicos en los que la bola cerrada unidad es compacta:

En efecto, supongamos que E tiene dimensión infinita. Vamos a aplicar el lema 2.8 para encontrar una sucesión en la bola unidad que no tiene ninguna subsucesión convergente: Sea x_1 un vector no nulo de E y sea $F_1 = \text{lin}\,\{x_1\}$, el subespacio generado por x_1. Como $\dim(F_1)$=1, F_1 es cerrado. Existe por tanto un punto x_2 tal que

$$\|x_2\| < 1, \quad \|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}.$$

Procediendo igual con el subespacio cerrado (y propio) generado por los vectores x_1, x_2, encontramos un punto x_3 tal que

$$\|x_3\| < 1, \quad \|x_1 - x_3\| > \frac{1}{2}, \quad \|x_2 - x_3\| > \frac{1}{2}.$$

Es evidente que, de este modo, se construye una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de la bola unidad, que no admite subsucesiones de Cauchy, pues cada dos términos de la misma distan entre sí más de $1/2$. Por lo tanto tampoco admite subsucesiones convergentes, luego la bola cerrada unidad no es compacta, como se trataba de probar. ∎

Límites y continuidad

El contenido de este parágrafo es eminentemente práctico. En él se exponen algunas técnicas para el estudio de la continuidad (existencia de límite) para una función de varias variables reales, $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Si $p = 1$, es decir si f toma sus valores en $\mathbb{R}$, se dirá que f es una *función escalar*. Cuando $p > 1$, una función de este tipo se dirá que es una *función vectorial*. En ese caso escribiremos

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_p),$$

donde $f_i(x)$ es la coordenada i-ésima de $f(x)$, es decir las funciones f_1, $f_2, \ldots, f_p$ son las funciones coordenadas de f.

Definición 2.10 Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y a un punto de acumulación de A. Diremos que el punto $l \in \mathbb{R}^p$ es límite de la función en el punto a, lo que denotaremos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = l,$$

si para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|x - a\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Es claro que *la función f es continua en a si y sólo si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Nótese que en la definición anterior, de acuerdo con la proposición 2.6, pueden utilizarse las normas que se quieran, es decir: *"Si l es límite de la función f en el punto a con respecto a dos normas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$, l es también límite de f en a respecto a cualquier otro par de normas"*.

Proposición 2.11 *Sea $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ una función de $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y a un punto de acumulación de A. Entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l = (l_1, \ldots, l_p) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f_i(x) = l_i$$

Demostración. Si en $\mathbb{R}^p$ utilizamos la norma producto, es evidente que la definición de límite para f en a puede expresarse en los siguientes términos: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|x - a\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f_i(x) - l_i| < \varepsilon\,, \quad \forall i$$

lo que equivale a decir que l_i es el límite de f_i en a, para todo i. ∎

2.12 Para estudiar la existencia de límite y/o la continuidad para funciones de varias variables se tendrá en cuenta, en primer lugar, las propiedades generales de las funciones continuas entre espacios topológicos (la composición de continuas es continuas, las aplicaciones constantes, la identidad, las proyecciones,... son continuas), o las que hacen referencia a la estructura vectorial de los espacios normados (el conjunto de las aplicaciones que toman sus valores en un espacio normado y que son continuas en un punto es también un espacio vectorial, ver ejercicios 2A,2B). Además, después de la proposición anterior, dicho estudio bastará hacerse para funciones escalares. Para ellas podemos establecer sin dificultad que

1. *El producto de funciones continuas en un punto es una función continua en ese punto.*

2. *Si f, g son funciones continuas en un punto a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.*

Análogos resultados y consideraciones se pueden obtener sobre la existencia de límites en un punto.

Ejemplo 2.13 Las funciones polinómicas son continuas: En efecto, toda función polinómica es suma de monomios, es decir de aplicaciones de la forma
$$(x_1, ..., x_n) \to a x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$
que son continuas por ser el producto de aplicaciones del tipo
$$(x_1, ..., x_n) \to a \ , \quad (x_1, ..., x_n) \to x_i.$$

2.14 En lo que sigue trataremos de buscar criterios que nos permitan estudiar la existencia de límite (continuidad), en aquellos casos en que las reglas generales para el cálculo de límites (2.12) no sean aplicables, es decir cuando aparezcan indeterminaciones. Cuando tales criterios sean aplicables, se evitará tener que usar, para resolver esas indeterminaciones, el engorroso método $\varepsilon - \delta$ que proporciona la definición de límite.

Para simplificar trabajaremos con funciones escalares de dos variables. Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y (x_0, y_0) un punto de acumulación de A, entonces, de acuerdo con la definición 2.10,
$$l = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y),$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta \quad \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta \\ |x - x_0| + |y - y_0| < \delta \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon,$$

2.15 (Condición suficiente para existencia de límite) *Con las notaciones anteriores, si existen dos constantes positivas M y α tales que, para (x, y) en algún entorno de (x_0, y_0), se verifica que*

$$|f(x, y) - l| \le M\|(x - x_0, y - y_0)\|^{\alpha}$$

entonces $l = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$.

Ejemplo 2.16 Consideremos la función

$$f(x, y) = \frac{(1 - y)(x - 1)^2 + y^2}{(x - 1)^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (1, 0)\,; \quad f(1, 0) = 1.$$

Esta función es continua en el punto (1,0), pues

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 1| &= \left| \frac{(1 - y)(x - 1)^2 + y^2}{(x - 1)^2 + y^2} - 1 \right| \\ &= \frac{|y|(x - 1)^2}{(x - 1)^2 + y^2} \le |y| \le \|(x, y) - (1, 0)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Hay que hacer notar que la condición de la proposición anterior no es necesaria, es decir una función puede tener límite y no satisfacer ninguna desigualdad de ese tipo. (Compruébense, por ejemplo, con la función

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2)}$$

en el punto (0,0)).

Definición 2.17 (Límites iterados) Con las notaciones anteriores, a cada uno de los límites

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)), \qquad \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))$$

se les denomina límites iterados.

Proposición 2.18 *Si existe el límite de una función en un punto* (x_0, y_0) *es decir,* $l = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, *entonces también existen y son iguales a "l"los límites iterados. (Se supone que para cada* $y \neq y_0$ *y* $x \neq x_0$ *existen los límites* $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ *y* $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$*).*

Demostración. Resulta directamente de aplicar la definición de límite.

Definición 2.19 (Límites direccionales) Llamaremos límites direccionales de la función f en el punto (x_0, y_0) a los límites siguiendo rectas que pasen por el punto, es decir $\lim_{x\to x_0} f(x, y_0+m(x-x_0))$. (Análoga definición para límite siguiendo curvas que pasan por el punto).

Nota. La condición 2.15 así como la definición 2.17 se generalizan de manera natural al caso de funciones de 3 o más variables. Para generalizar también la noción de límites direccionales de una función en un punto, deberemos escribir en forma paramétrica las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto. Así si $a = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces

$$x_1 = a_1 + th_1,\ x_2 = a_2 + th_2,\ \ldots\ , x_n = a_n + th_n$$

es la ecuación de la recta que tiene como vector director $h = (h_1, \ldots, h_n)$ y que pasa por a. El límite siguiendo esta recta será entonces

$$\lim_{t\to 0} f(a_1 + th_1, \ldots, a_n + th_n).$$

Para $n = 2$ el límite anterior coincide con el límite direccional en el sentido de la definición 2.19, siguiendo la recta de pendiente $m = h_2/h_1$.

Como en el caso de los límites iterados, es evidente que la existencia de límite implica la de los límites direccionales y siguiendo curvas. Se deduce, pues, que la existencia de los límites iterados, direccionales y siguiendo curvas son *condiciones necesarias* para la existencia del límite. Por lo tanto:

NO existe límite cuando

1. *No existe alguno de los límites iterados o existen pero son distintos.*

Ejemplo 2.20 Consideremos la función

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0); \qquad f(0,0) = 0.$$

Esta función no es continua en $(0,0)$ ya que uno de los límites iterados no existe:

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{|y|} = \pm 1.$$

Ejemplo 2.21 Este es un ejemplo de una función para la que los límites iterados existen pero son diferentes (luego el límite no existe)

$$f(x,y) = \frac{(x+y-1)\ln(x^2+2y^2)}{(x-1)^2+y^2}, \qquad \text{si } (x,y) \neq (1,0).$$

Se tiene que

$$\lim_{x\to 1}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)\ln x}{(x-1)^2} = 2$$

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 1} f(x,y)) = \lim_{y\to 0} \frac{y\ln(1+2y^2)}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{4y}{1+2y^2} = 0.$$

2. *No existe alguno de los límites direccionales o existen, pero no son iguales.*

Ejemplo 2.22 Sea

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$

Los límites direccionales de esta función no son todos iguales. En efecto:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{m}{m^2+1}$$

que depende de m. Se deduce pues que el límite no existe.

Ejemplo 2.23 Sea

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+(y-x)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0); \qquad f(0,0) = 0.$$

Es inmediato comprobar que $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0$ para $m \neq 1$. En cambio para $m = 1$ el límite anterior no existe, es decir la función no tiene límite en (0,0) siguiendo la recta $y = x$ y por lo tanto no admite límite en ese punto (no es continua en (0,0)).

3. *No existe el límite siguiendo alguna curva que pasa por el punto o el límite varía dependiendo de la curva que se tome.*

Ejemplo 2.24 Consideremos la función

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \ \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

Tanto los límite iterados como los límites direccionales en el punto (0,0) existen y valen 0, sin embargo esta función no tiene límite en ese punto, ya que si tomamos las curvas $y = m\sqrt{x}$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} f(x, m\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{x^2+m^4x^2} = \frac{m^2}{m^4+1}.$$

Es decir los límites siguiendo esa familia de curvas existen todos pero son diferentes entre sí, luego el límite no existe.

Ejemplo 2.25 Sea

$$f(x,y) = \frac{x^2 \ln y}{x^4+(x^2+\ln y)^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,1); \quad f(0,1) = 0.$$

Es inmediato comprobar que también en este caso los límites iterados en (0,1) valen 0. En cuanto a los límites direccionales

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+mx)}{x^4+(x+\ln(1+mx))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+mx)}{x^2+(x+1/x\ln(1+mx))^2} = \frac{\ln 1}{m^2} = 0.$$

Sin embargo tampoco existe el límite ya que si consideramos la curva $y = e^{-x^2}$, que obviamente pasa por (0,1), la función admite límite siguiendo esta curva, pero es diferente de 0.

Aunque los casos más frecuentes sobre la existencia de límite en un punto se resuelven mediante el estudio desarrollado anteriormente, a veces no queda más remedio que acudir al estudio $\varepsilon - \delta$. En esos casos puede ayudar el paso a coordenadas polares (sólo si f es una función de dos variables).

2.26 (Coordenadas polares para límite en (0,0)) *La función f tiene límite en $(0,0)$, es decir $l = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $r < \delta$ entonces*

$$|f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - l| < \varepsilon \ \text{(uniformemente en } \theta).$$

Demostración. Basta espresar la condición de límite en coordenadas polares.

Ejemplo 2.27 Sea

$$f(x,y) = \frac{y}{x}\text{sen}\,(x^2+y^2) \text{ si } x \neq 0; \qquad f(0,y)=0.$$

Pasando a polares se obtiene

$$f(r\cos\theta, r\text{sen}\,\theta) = \tan\theta\text{sen}\,r^2.$$

La condición anterior no se cumple, pues existe ε (por ejemplo $\varepsilon = 1$) tal que cualquiera que sea $\delta > 0$ se puede encontrar $r < \delta$ de manera que $|\tan\theta\text{sen}\,r^2| > 1$ para algún θ. Basta tomar $r < \delta$ con la condición $r^2 \neq k\pi$ y θ tal que $|\tan\theta| > 1/|\text{sen}\,r^2|$. Se deduce pues que la aplicación no es continua en (0,0).

Tampoco resulta continua en ningún punto de la forma $(0, y_0)$. Si $y_0^2 \neq k\pi$ es obvio, pues entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$. En otro caso, puede comprobarse que los límites direccionales no son todos iguales.

En los puntos con $x \neq 0$ se pueden aplicar los teoremas generales sobre funciones continuas para probar que la función sí que es continua.

Ejercicios

2A Demostrar que en todo espacio normado la aplicación suma

(i) Es continua.

(ii) Es abierta. Más precisamente, si U es un conjunto abierto de E y A es un conjunto cualquiera, entonces $A+U$ es abierto.

(iii) No es cerrada. Sin embargo, si K es compacto y F cerrado, entonces $K+F$ es también cerrado.

Indicación. Para probar que no es cerrada considérense los conjuntos $F_1 =$ Eje X y $F_2 = \{(x, 1/x) \colon x > 0\}$.

2B (a) Demostrar que, en todo espacio normado E, la aplicación "multiplicación por escalares"es una aplicación continua.

(b) Sea $S = \{x \in E \colon \|x\| = 1\}$. Demostrar que esta aplicación lleva el conjunto $[0,1]\times S$ sobre la bola cerrada unidad, $B[0,1] = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\}$.

(c) Deducir de (b) que el espacio normado E es de dimensión finita si y sólo si la esfera unidad S es compacta.

2C Demostrar que en todo espacio normado

(a) La adherencia de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial.

(b) La adherencia de un conjunto convexo es también convexo.

2D Sea E un espacio normado y $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ dos normas comparables sobre E, i.e., o bien existe una constante positiva $a > 0$ tal que $\|x\| \leq a\|x\|^*$, $\forall x \in E$, o bien existe una constante positiva $b > 0$ tal que $\|x\|^* \leq b\|x\|$, $\forall x \in E$. Probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión en E que converge respecto a ambas normas, entonces los limites coinciden.

2E Sea f la aplicación definida sobre el conjunto $C = \{(x, y)\colon x^2 \neq y^2\}$ de $\mathbb{R}^2$ como

$$f(x, y) = \left(\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y} \, , \, \frac{e^x - e^y}{x + y} \right).$$

Demostrar que f es continua sobre C y que se puede extender a $\mathbb{R}^2$ continuamente.

2F Estudiar la existencia de los siguientes límites

1. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x - y)}{x^2 + y^2}$

2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x + 1)y^2 + x^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$

3. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x + 1)y^3 + x^2}{\sqrt{x^2 + y^4}}$

4. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2 + \pi^2(x - 1)^2}{\sqrt{\operatorname{sen}^4 \pi x + y^4}}$

5. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + y^2 - xy}{2\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{3x^2 + 2y^2}}$

6. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(x + y)}{(x + y)^2 + x^2y^2}$

7. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{\operatorname{sen} x^2 + \operatorname{sen} y^2}$

8. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + y^3)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^4}$

9. $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3 - y^2 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$

10. $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3 - y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$

11. $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\cos xz - \cos yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

12. $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\cos xz - \cos yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$

13. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{1 + \cos(x + \sqrt{3}y)}{1 + y^2 + \cos(x - y)}$

14. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(y + \ln(x - 1))^2}{e^{y^2} + x^2 - 4x + 3}$

2G Demostrar que si (E_i) es una familia infinita de espacios normados, ninguna norma sobre el espacio vectorial $E = \prod E_i$ puede inducir sobre E la topología producto de los espacios E_i.

2H Demostrar que la expresión

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + (y - x)^2 + (z - y)^2}$$

define una norma sobre $\mathbb{R}^3$. Compararla con la norma euclídea.

2I Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que mediante la expresión

$$\|(x,y)\| = \|x+y\| + \|x-y\|$$

se define una norma sobre $E \times E$, equivalente a la norma producto.
Indicación. La equivalencia entre esta norma y la norma producto constituye un fácil ejercicio si antes se prueba la desigualdad $2\|x\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$, para todos $x, y \in E$.

2J Sea $E = C([0,1]$ y consideremos las normas

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

(a) ¿Son comparables ambas normas? ¿y equivalentes?
(b) Estudiar la continuidad del producto de funciones de E, respecto a las normas anteriores.

2K Sea E el espacio vectorial de las funciones polinómicas sobre el intervalo $[0,1]$. Consideremos sobre él las normas:

$$\begin{aligned}
&\|a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n\|_\infty = \max(|a_0|, \ldots, |a_n|)\\
&\|a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n\|_1 = |a_0| + \cdots + |a_n|\\
&\|a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n\| = \max_{x\in[0,1]} |a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n|.
\end{aligned}$$

Establecer las comparaciones posibles entre ellas, probando, en particular, que la primera y la tercera no son comparables.

2L Sea f una aplicación entre espacios normados y supongamos que existe $\lim_{x\to x_0} \|f(x)\|$ ¿se mantendrá la existencia de este límite si se cambia la norma $\|\cdot\|$ por otra equivalente?

2M Calcular la adherencia del conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1\right\}.$$

2N Sea $K = \{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 2,\ x+y+z \leq 1\}$.

(a) Probar que K es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ y hallar $\overset{\circ}{K}$ y $\mathrm{Fr}(K)$.
(b) Sea $S = \{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 2\}$ y M la traza sobre S del conjunto $\{(x,y,z) \colon x+y+z < 1\}$. Obtener el interior, la adherencia y la frontera de M, relativo al subespacio S.

2O (a) Demostrar las desigualdades

1. $x^2 + y^2 - x^2y^2 \geq 1/2(x^2 + y^2)$, si $|x| < \sqrt{2}$ o $|y| < \sqrt{2}$.
2. $x^4 + y^4 - x^2y^2 \geq 1/2(x^4 + y^4)$, $\forall x, y$.

(b) Estudiar, teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, los siguientes límites:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{\big(x^2y^2 - (x^2 + y^2)\big)^2}\ , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^4 + y^4 - x^2y^2}\ ,\ \alpha, \beta \geq 0.$$

2P Estudiar, pasando a coordenadas polares, los siguientes límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2}\ , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(x + y)}{(x + y)^2 + x^2y^2}.$$

2Q Estudiar la continuidad uniforme de la aplicación

$$f(x, y) = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x^2 + y^2}$$

en $C_1 = \{(x, y)\colon 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ y en $C_2 = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 > 1\}$.