MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Víctor Verdugo y Sebastián Bustamante

Control 2

Miércoles 27 de Octubre 2010

P1. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable y tal que existe $k \in (0,1)$ para el cual $\|Dg(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq k$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $f(x) = x + g(x)$:

a) Pruebe que $\|f(x) - f(y)\| \geq (1-k)\|x-y\|$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

b) Deduzca que f es inyectiva y que $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

c) Argumente la diferenciabilidad de f y pruebe que

$$\langle Df(x)h, h\rangle \geq (1-k)\|h\|^2$$

para todo $(x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
Indicación: Recuerde la desigualdad de Cauchy-Schwarz

d) Sea $y \in \mathbb{R}^n$ fijo y $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = \|f(x) - y\|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que u es diferenciable y calcule $Du(x)$ en función de $Df(x)$.

e) Pruebe que existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} u(x) = u(x_0)$.
Indicación: Si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función contínua y tal que $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} h(x) = +\infty$, entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} h(x) = h(x_0)$.

f) Muestre que $f(x_0) = y$ y concluya que f es biyectiva.

P2. *i*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Encuentre las derivadas parciales de f y estudie la continuidad de ellas en $\mathbb{R}^2$.

c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

d) Muestre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

e) Muestre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) ¿Es f de clase $\mathcal{C}^2$? Justifique.

ii) Rehaga la demostración del Teorema de Schwarz. Justifique la igualdad de los límites iterados, y concluya.

iii) *a*) Considere la función:

$$F(x_1, x_2, y) = y\arctan(1-y^2) + 3x_1 + 5y - 8x_2^3 = 0$$

y el punto $(x_1, x_2, y) = (1,1,1)$. Pruebe que se satisfacen las condiciones del teorema de la Función Implícita y calcule $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}(1,1)$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}(1,1)$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(u,v,w,x,y) = \begin{pmatrix} uvw + x + y + 2 \\ ux - vy + w^2 \end{pmatrix}$$

Muestre que se puede despejar (x, y) en términos de (u, v, w) entorno a $(u_0, v_0, w_0) = (1, 2, 3)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(1,2,3)$ y $\frac{\partial y}{\partial w}(1,2,3)$.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y considere la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{1}$$

a) Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x,y) = (u,v) = (x+y, x-y)$ un cambio de variables. Usando que $f(x,y) = g(\phi(x,y))$ para alguna función g, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en términos de g.

b) Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en términos de g.

c) Asumiendo que f satisface (1), pruebe que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

d) Determine la forma general para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisface $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

e) Encuentre una solución particular para (1), que no sea la función nula ni un polinomio.

TIEMPO: 3 HORAS