Cálculo en Varias Variables
Auxiliar 17 - Primavera 2010

Prof: Marcelo Leseigneur
Aux: Sebastián Bustamante F. & Víctor Verdugo S.

P1. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $w \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} (P(w)) & \text{máx} & f(x) \\ & s.a. & g(x) = w \end{array}$$

Para cada w, sea $x^*(w)$ el valor que maximiza f para la restricción $g(x) = w$. En este caso, existe un valor $\lambda = \lambda^*(w)$ tal que el par $(x^*(w), \lambda^*(w))$ es solución al problema de los multiplicadores de Lagrange, es decir,

$$\nabla f(x^*(w)) = \lambda^*(w) \nabla g(x^*(w))$$
$$w = g(x^*(w)).$$

Demuestre que

$$\lambda^*(w) = \frac{d}{dw} f(x^*(w)).$$

P2. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, homogénea de grado $m \geq 2$, es decir, para todo $t \in \mathbb{R}$ verifica

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que f verifica la igualdad

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (m-1)mf(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

P3. Calcule

(i)
$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 y e^{x^3} dx dy.$$

Indicación: cambie con cuidado el orden de integración (Fubini).

(ii)
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{3/2} dz dy dx$$

(iii)
$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) dz dx dy$$

P4. Hallar la masa de la porción del sólido Q dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16$ situado por encima del plano XY. La densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano XY.

P5. Sea una horma cilíndrica de queso de base circular con radio $r > 0$ y altura $h > 0$. Se corta un trozo S, haciendo dos cortes verticales desde el centro de la horma hacia su borde. Los cortes forman un ángulo α entre sí. Calcule el peso del trozo S si la densidad de masa del queso es

$$\rho(x, y, z) = k[\sqrt{x^2+y^2}(z^2 - hz + h^2)].$$