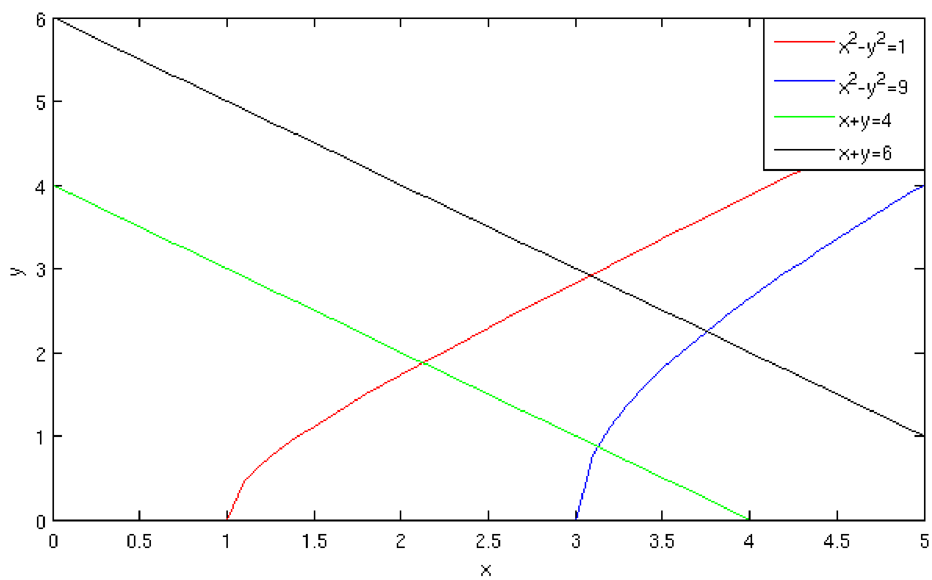
MA2001-1 Cálculo en Varias Variables - Primavera 2010
Pauta Control 3, Pregunta 3
Prof. Marcelo Leseigneur
Aux. Sebastián Bustamante y Víctor Verdugo

Sea R la región del plano delimitada por las curvas $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 9, x + y = 4, x + y = 6$:

a) Dibuje la región R.

Solución:



b) Exprese el área de la región R como la suma de tres integrales en las variables x e y, y usando el orden de integración $dydx$. Explicite los límites de integración y finalmente calcule el área.

Solución:

Veamos primero las intersecciones de las curvas, para poder establecer los límites de integración:

$x^2 - y^2 = 1 \quad \wedge \quad x + y = 4 \longrightarrow x = \frac{17}{8}$.

$x^2 - y^2 = 1 \quad \wedge \quad x + y = 6 \longrightarrow x = \frac{37}{12}$.

$x^2 - y^2 = 9 \quad \wedge \quad x + y = 4 \longrightarrow x = \frac{25}{8}$.

$x^2 - y^2 = 9 \quad \wedge \quad x + y = 6 \longrightarrow x = \frac{15}{4}$.

Luego, podemos expresar el área pedida como

$$\underbrace{\int_{\frac{17}{8}}^{\frac{37}{12}}\int_{4-x}^{\sqrt{x^2-1}} dydx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{37}{12}}^{\frac{25}{8}}\int_{4-x}^{6-x} dydx}_{I_2} + \underbrace{\int_{\frac{25}{8}}^{\frac{15}{4}}\int_{\sqrt{x^2-9}}^{(6-x)} dydx}_{I_3}.$$

Sabiendo que

$$\int \sqrt{x^2-a}\; dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a} - a\ln(2(\sqrt{x^2-a}+x))\right) + C$$

tenemos los siguientes valores para las integrales:

$$\begin{array}{rcc} I_1 & = & \frac{1}{6}\left(7-3\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) \\ I_2 & = & \frac{1}{12} \\ I_3 & = & -\frac{5}{4}-\frac{9\ln(8)}{2}+\frac{9\ln(12)}{2} \end{array}$$

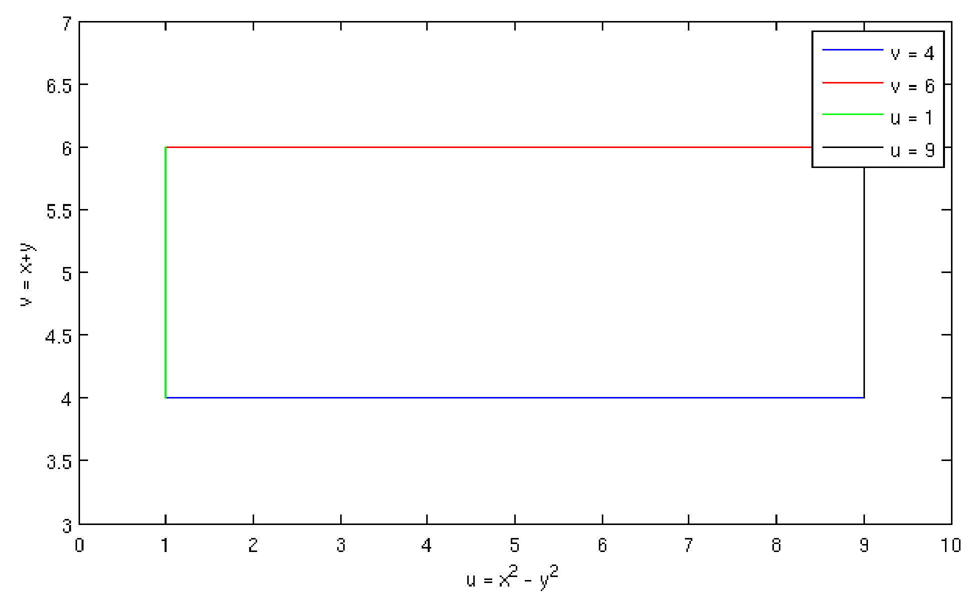
De esta manera,

$$I_1+I_2+I_3 = 4\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

c) Mediante un cambio de variables adecuado resuelva el problema anterior (dibuje la nueva región) y compruebe su resultado con el valor obtenido en b).

Solución:

Sean $u = x^2 - y^2$ y $v = x + y$. Luego, la región a integrar es la siguiente:



Por otro lado,

$$\left|\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2v,$$

con lo que la integral pedida se puede escribir como

$$\int_1^9 \int_4^6 \frac{1}{2v} dv du = 4 \ln\left(\frac{3}{2}\right),$$

que entrega el mismo valor calculado en la parte b).