Pauta Control 3

MA2001-1 Otoño 2010
Prof: Marcelo Leseigneur
Auxs: Víctor Verdugo
Sebastián Bustamante.

P1) a) Primero notemos que como la función es diferenciable en x_0, podemos calcular sus derivadas direccionales como:

$$f'(x_0; s) = \langle s, \nabla f(x_0) \rangle$$

Luego, el problema de optimización asociado a encontrar las direcciones de mayor y menor crecimiento es:

$$\begin{aligned} &\max \ \langle s, \nabla f(x_0) \rangle \\ &\text{sa} \ \langle s, s \rangle = 1 \end{aligned}$$

$\leftarrow$ Restricción de normalización.

Usando multiplicadores de Lagrange, tenemos que:

$$L(s,\lambda) = \langle s, \nabla f(x_0)\rangle - \lambda(\langle s,s\rangle - 1)$$

$$\Rightarrow \nabla L(s,\lambda) = \nabla f(x_0) - 2\lambda s = 0$$

pues $\nabla f(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow s = \frac{\nabla f(x_0)}{2\lambda}$$

Reemplazando en la restricción, obtenemos que:

$$\left\| \frac{\nabla f(x_0)}{2\lambda} \right\|^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{\pm \|\nabla f(x_0)\|}{2}$$

Lo cual entrega los candidatos:

$$s_1 = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} \quad y \quad s_2 = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}.$$

Puesto que el conjunto $\{s \in \mathbb{R}^n : \langle s,s\rangle = 1\} = \partial B(0,1)$ es un conjunto compacto, el mínimo y el máximo son alcanzados y por lo tanto las direcciones buscadas son efectivamente s_1 y s_2.

b) $$f(x) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{x_j}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x_i}\left(\sum_k e^{x_k} - e^{x_i}\right)}{\left(\sum_k e^{x_k}\right)^2} & i = j \\[2ex] -\dfrac{e^{x_i} e^{x_j}}{\left(\sum_k e^{x_k}\right)^2} & i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow h^t H_f(x_0) h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j$$

$$= \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) h_i^2$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_k e^{x_k}\right)^2}\left[\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\left(\sum_k e^{x_k} - e^{x_i}\right) h_i^2 - \sum_{i\neq j} e^{x_i} e^{x_j} h_i h_j\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_k e^{x_k}\right)^2}\left[\left(\sum_k e^{x_k}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} h_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(h_i e^{x_i}\right)^2 - \sum_{i\neq j} e^{x_i} e^{x_j} h_i h_j\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_k e^{x_k}\right)^2}\left[\left(\sum_k e^{x_k}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} h_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} h_i\right)^2\right] \quad (*)$$

Sea $(z_1, \dots, z_n) = (e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{\left(\sum_k z_k\right)^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\sum_{i=1}^{n} z_i h_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i h_i\right)^2\right]$$

Si consideramos los vectores $x_i = h_i\sqrt{z_i}$, $y_i = \sqrt{z_i}$, Por Cauchy-Schwartz tenemos que:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} h_i\sqrt{z_i}\cdot\sqrt{z_i}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\sum_{i=1}^{n} z_i h_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i h_i\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (*) \geq 0 \Rightarrow h^t H_f(x) h \geq 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

con igualdad solo para $h = 0$ $\Rightarrow$ f convexa.

c) $I(p_c, p_{sc}) = (18 - p_c)p_c + (10 - p_{sc})p_{sc}$

$C(p_c, p_{sc}) = 10 + (28 - p_c - p_{sc})^2$

$\Rightarrow U(p_c, p_{sc}) = 18p_c + 10p_{sc} - p_c^2 - p_{sc}^2 - 10 - (28 - p_c - p_{sc})^2$

$\uparrow$

utilidades

Imponemos condición de primer orden:

$\nabla U(p_c, p_{sc}) = 0$

$$\Rightarrow \quad 18 - 2p_c + 2(28 - p_c - p_{sc}) = 0$$
$$10 - 2p_{sc} + 2(28 - p_c - p_{sc}) = 0$$

$\Rightarrow \quad (p_c^*, p_{sc}^*) = \left(\frac{41}{3}, \frac{29}{3}\right)$ es el único candidato.

Pero $U(\cdot,\cdot)$ es una función estrictamente cóncava (pues $-U(\cdot,\cdot)$ es cuadrática $\Rightarrow$ est. convexa)
Luego, (p_c^*, p_{sc}^*) es solución al problema de maximización irrestricto (única solución)