MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Víctor Verdugo y Sebastián Bustamante

Control 3

Miércoles 24 de Noviembre 2010

P1. *a*) **(2 ptos.)** Use el método de los Multiplicadores de Lagrange para probar que las direcciones de mínima y máxima pendiente donde $\nabla f(x_0) \neq 0$ son

$$s = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} \text{ y } S = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

Esto es, encuentre el óptimo global de $h(s) = \langle s, \nabla f(x_0)\rangle$ sujeto a $\langle s, s\rangle = 1$.

b) **(2 ptos.)** Usando el criterio del Hessiano demuestre la convexidad de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$f(x) = \log(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$$

c) **(2 ptos.)** Una empresa de refrescos produce dos tipos de bebida: con cafeína y sin cafeína. La curva de demanda para el primer caso es $x_c = 18 - p_c$ y para el segundo es $x_{sc} = 10 - p_{sc}$. El costo de producción es el mismo para ambas bebidas y viene dado por la función $c(x) = 10 + x^2$, siendo $x = x_c + x_{sc}$. Los ingresos obtenidos por la empresa (como función de los precios) serían $I(p_c, p_{sc}) = (18 - p_c)p_c + (10 - p_{sc})p_{sc}$. Encuentre los precios de cada tipo si la empresa es maximizadora de beneficios, comprobando que efectivamente se trata de un máximo global.

P2. Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y, z) = xy + z$$

determine si existen mínimo y máximo global de la función sobre la región

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy + z^2 \leq 1\}$$

En caso de existir, calcúlelos.

P3. Sea R la región del plano deliitada por las curvas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $x + y = 4$, $x + y = 6$:

a) **(1 pto.)** Dibuje la región R

b) **(2 ptos.)** Exprese el área de la región R como la suma de tres integrales en las variables x e y, y usando el orden de integración $dydx$. Explicite los límites de integración y finalmente calcule el área.

c) **(3 ptos.)** Mediante un cambio de variables adecuado resuelva el problema anterior (dibuje la nueva región) y compruebe su resultado con el valor obtenido en *b*).

TIEMPO: 2,5 HORAS